

Mechanika cieczy

Ciecz jako ośrodek ciągły

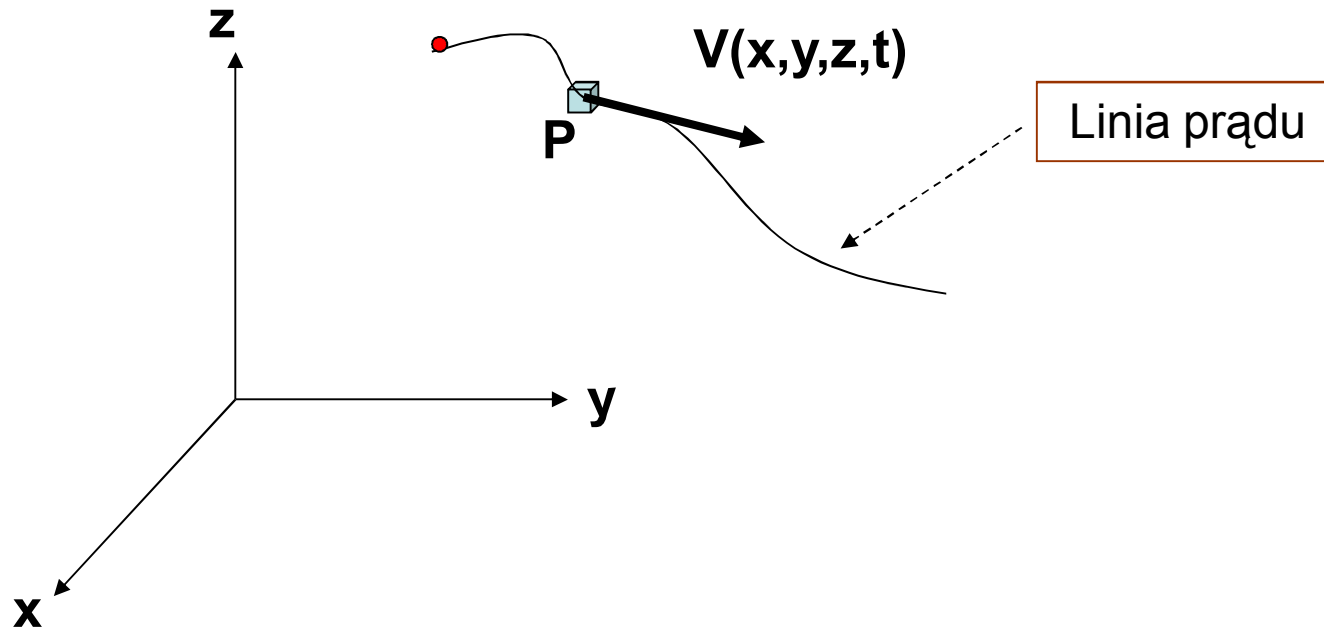
1. Cząsteczki cieczy nie są związane w położeniach równowagi – mogą przemieszczać się na duże odległości.

2. Cząsteczki cieczy oddziałują ze sobą, lecz oddziaływania te są słabsze niż w ciele stałym. Wynikiem tych oddziaływań jest zjawisko zwane lepkością cieczy.

3. W cieczy nie można wytworzyć trwałych naprężeń stycznych, w rezultacie nie mogą w niej wystąpić długotrwałe odkształcenia postaciowe.

4. Cząsteczki cieczy jednorodnej są nierozróżnialne. Ze względu na olbrzymią liczbę cząsteczek w jednostce objętości cieczy nie można śledzić ruchu każdej cząsteczki z osobna.

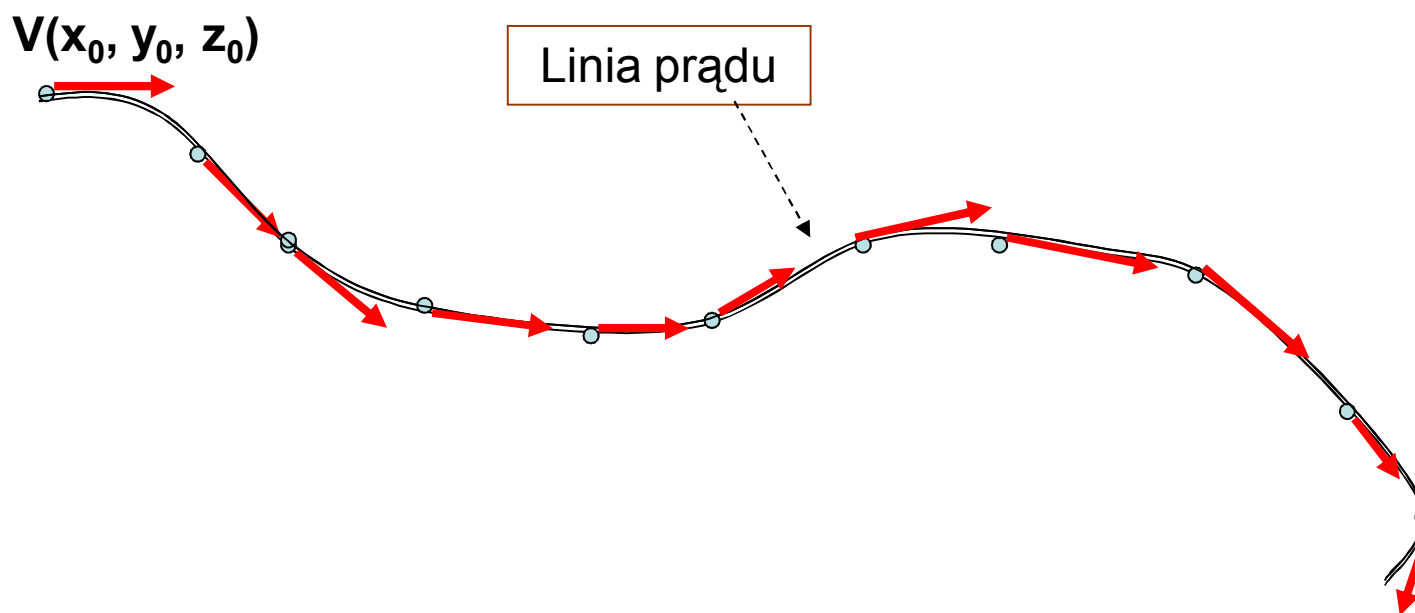
Pole prędkości cieczy



Zakładamy, że w danej chwili czasu „ t ” dowolna cząstka cieczy znajdująca się w punkcie P ma określoną prędkość „ v ” zależną od położenia punktu P . Jeśli znany jest przestrzenny rozkład prędkości dla każdej chwili czasu to **funkcję $V(x,y,z,t)$ nazywamy polem prędkości cieczy.**

Stacjonarne pole prędkości ciecchy

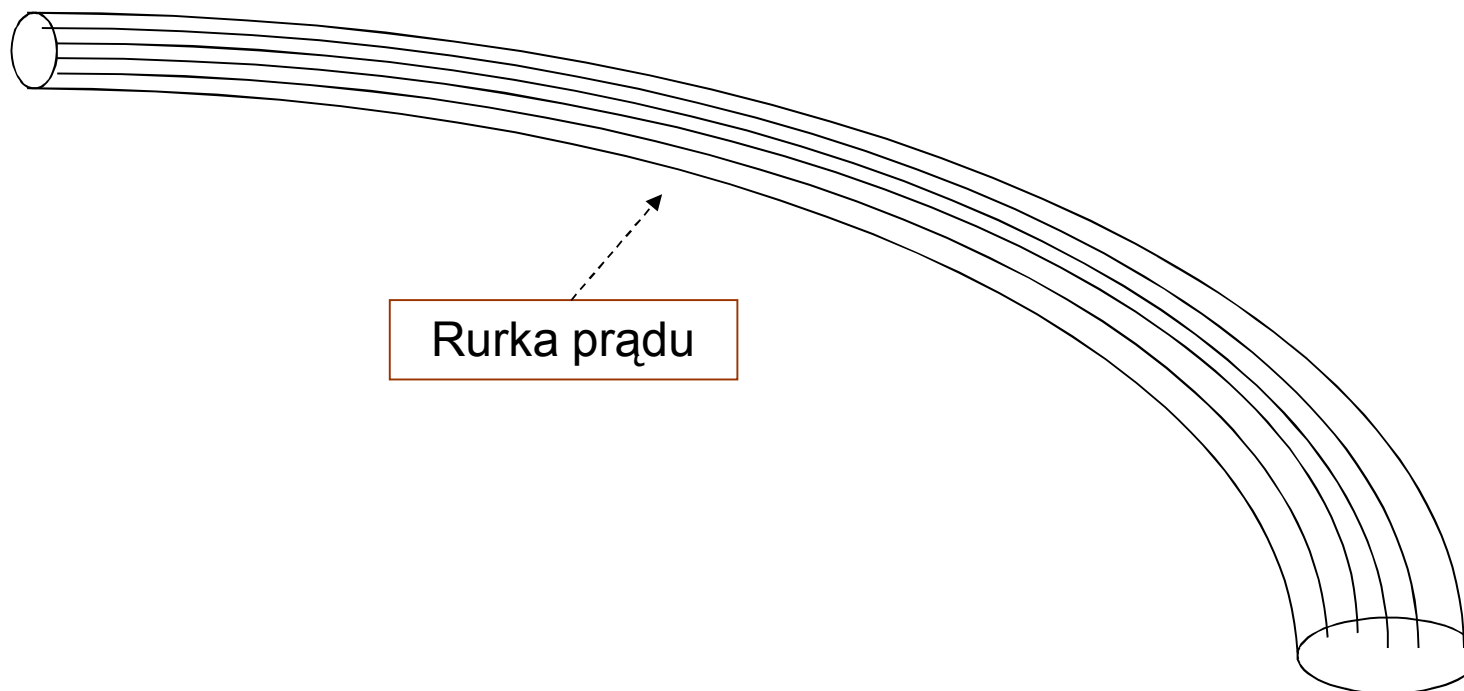
Jeżeli przestrzenny rozkład prędkości w cieczy nie zmienia się w czasie to pole prędkości $V(x,y,z)$ nazywamy polem stacjonarnym



W polu stacjonarnym ruch cząstki ciecchy jest zdeterminowany przez warunki początkowe $V(x_0, y_0, z_0)$. Może ona poruszać się tylko wzdłuż wyznaczonej linii prądu

Laminarny przepływ ciecchy

W polu stacjonarnym prędkości w blisko siebie leżących punktach nie mogą się znacznie różnić a zatem sąsiadujące ze sobą cząstki ciecchy muszą poruszać się po zbliżonych, nieprzecinających się liniach prądu.

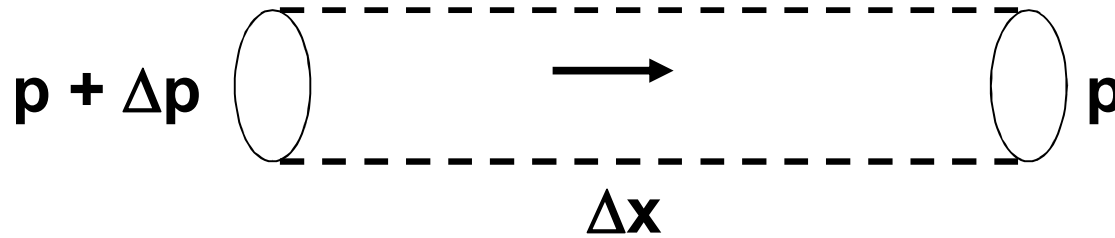


Zbiór leżących blisko siebie linii prądu nazywamy rurką prądu.

Przepływ ciecchy wzdłuż rurki prądu nazywamy **przepływem laminarnym**

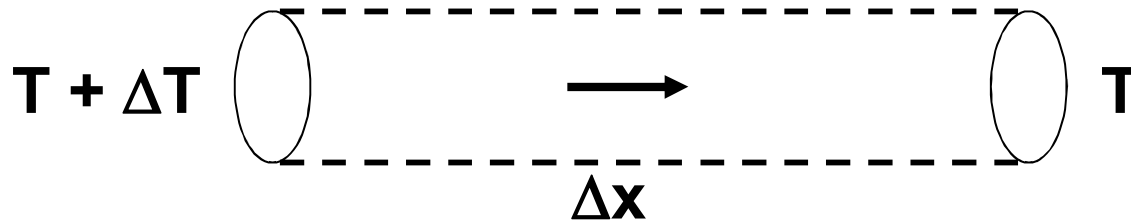
Przyczyny przepływu cieczy

1. Gradient ciśnienia



$$\text{grad } p = \frac{\Delta p}{\Delta x}$$

2. Gradient temperatury



$$\text{grad } T = \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Równanie stanu cieczy

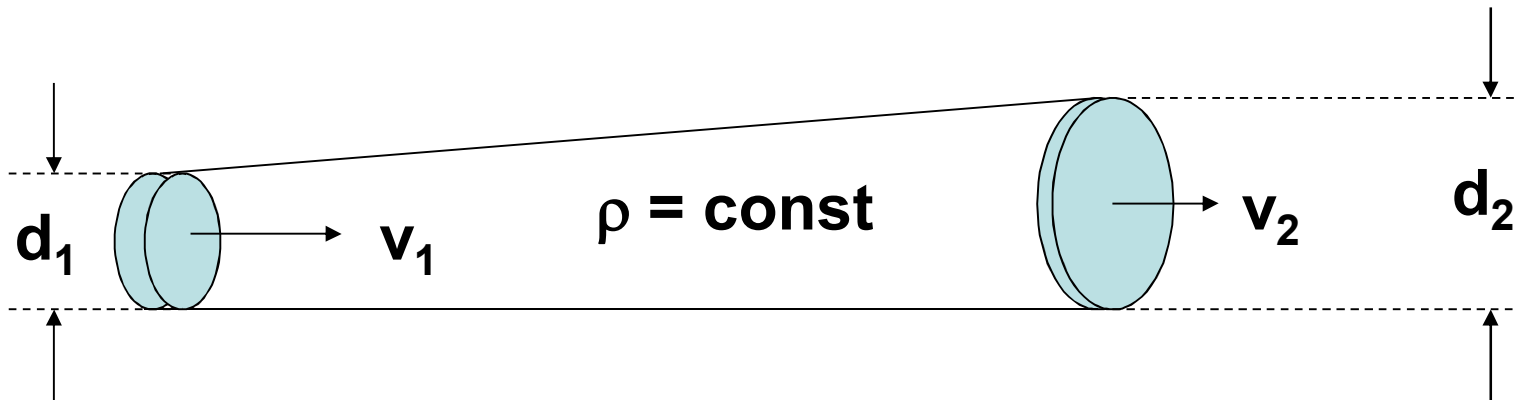
Zależność gęstości od ciśnienia i temperatury

$$\rho = f[p(x, y, z); T(x, y, z)]$$

Przypadek szczególny – ciecz nieściśliwa

$$T = \text{const} \quad \rho = \text{const}$$

Równanie przepływu cieczy nieściśliwej



Masa cieczy wpływającej

$$m = \rho \cdot \left(\frac{\pi d_1^2}{4} \right) \cdot v_1 \cdot \Delta t$$

Masa cieczy wypływającej

$$m = \rho \cdot \left(\frac{\pi d_2^2}{4} \right) \cdot v_2 \cdot \Delta t$$

$$v_1 \cdot d_1^2 = v_2 \cdot d_2^2 \Rightarrow v \cdot d^2 = const$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}$$

Równanie ruchu cieczy

$$\rho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}_{wewn} + \vec{f}_{zewn} + \vec{f}_{lepk}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Ruch cieczy nieściśliwej i nielepkiej w polu grawitacyjnym

$$\rho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = (-grad p) + (-\rho \cdot grad v)$$

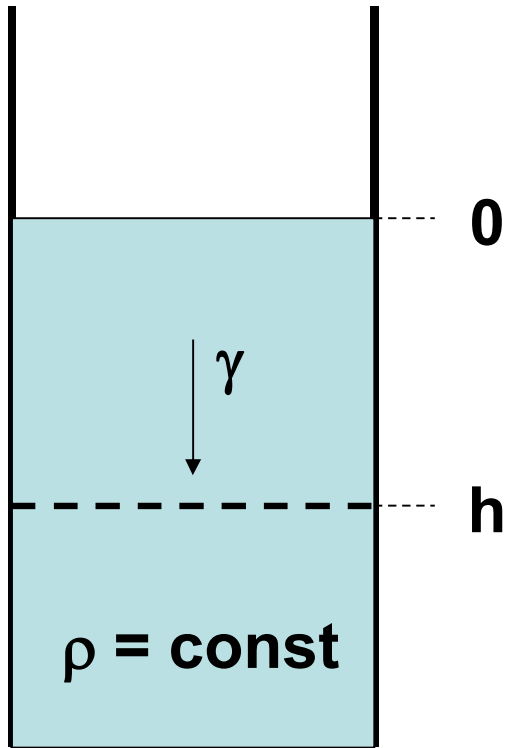
Podstawowe równanie hydrostatyki

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

$$(-\text{grad } p) + (-\rho \cdot \text{grad } v) = 0$$

$$p + \rho \cdot v = 0$$

Ciśnienie hydrostatyczne

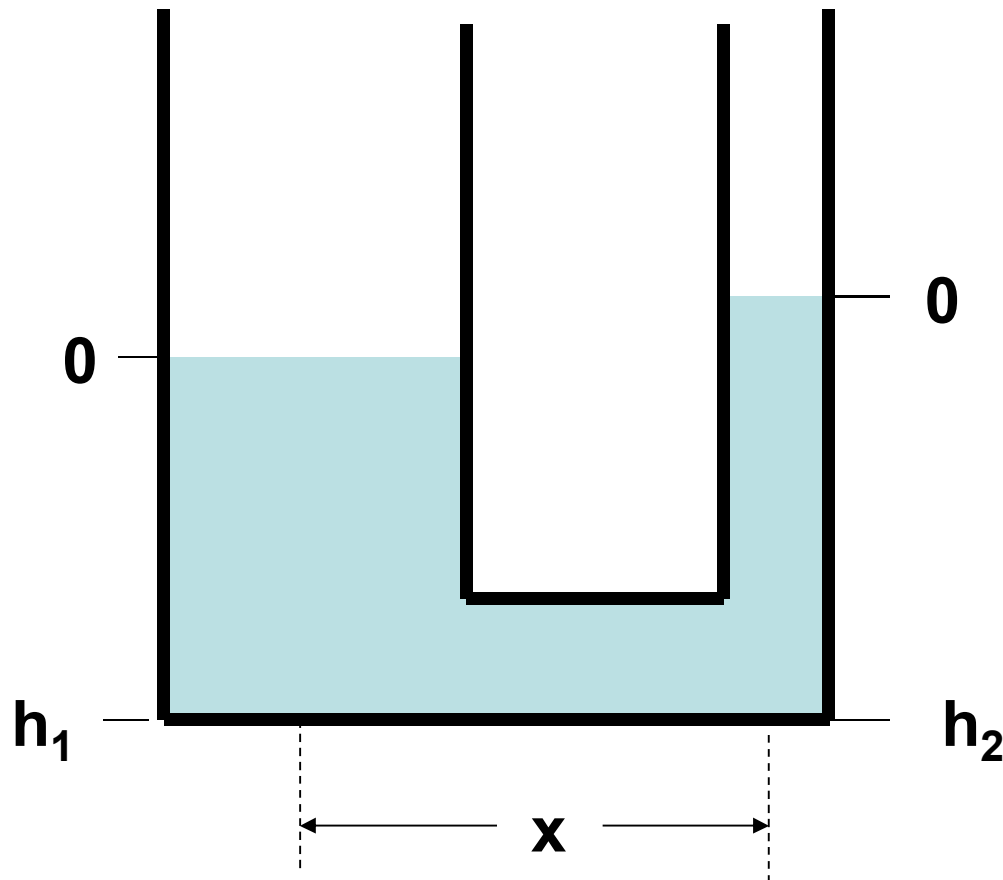


$$(-\text{grad } p) + (-\rho \cdot \text{grad } v) = 0$$

$$\frac{p(0) - p(h)}{h} + \rho \cdot \gamma = 0$$

$$p(h) = p(0) + \rho \cdot \gamma \cdot h$$

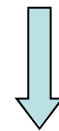
Naczynia połączone



$$p(h_1) = p(0) + \rho \cdot \gamma \cdot h_1$$

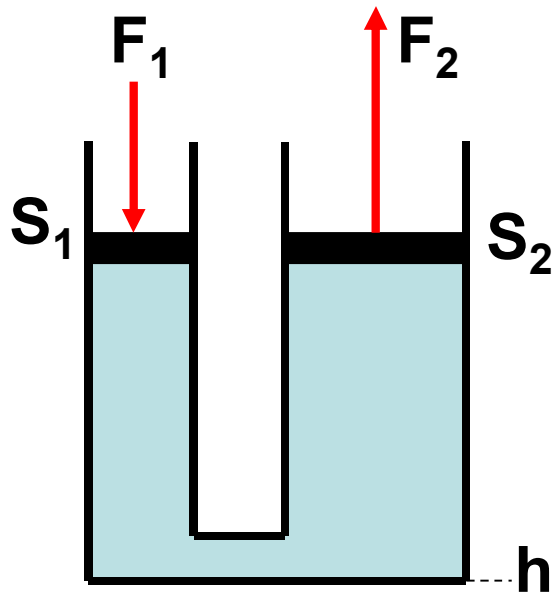
$$p(h_2) = p(0) + \rho \cdot \gamma \cdot h_2$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p(h_1) = p(h_2)$$



$$h_1 = h_2$$

Prawo Pascala



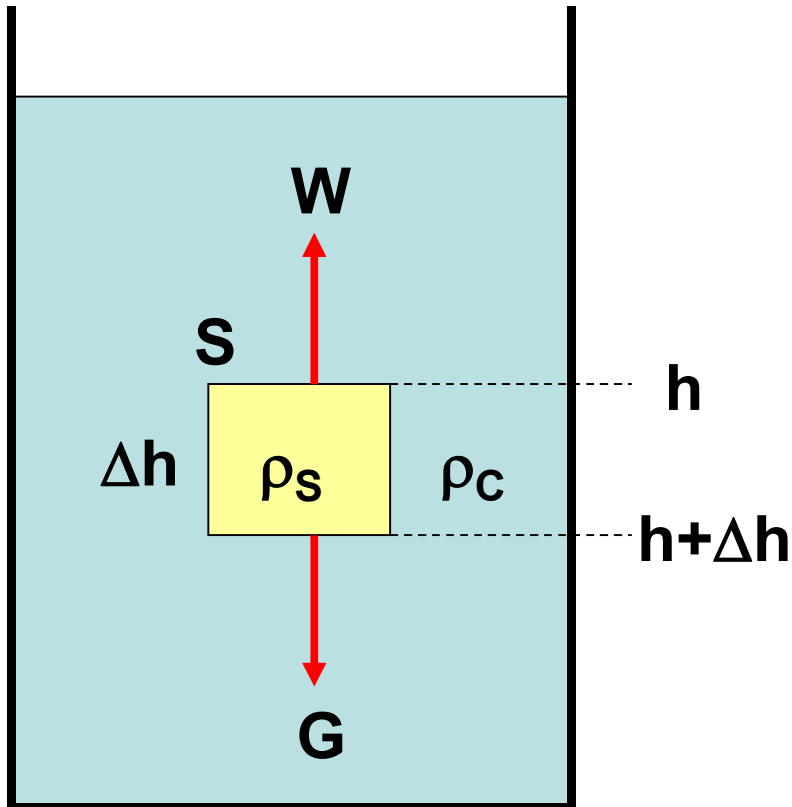
Ciśnienie zewnętrzne przyłożone w pewnym punkcie cieczy podwyższa ciśnienie w każdym punkcie cieczy

$$p_{zewn} = \frac{F_1}{S_1}$$

$$p(h) = p_{zewn} + \rho \cdot \gamma \cdot h$$

$$F_2 = p_{zewn} \cdot S_2 = F_1 \cdot \frac{S_2}{S_1}$$

Prawo Archimedesesa



$$p(h) = p_{zewn} + \rho_c \cdot \gamma \cdot h$$

$$p(h + \Delta h) = p_{zewn} + \rho_c \cdot \gamma \cdot (h + \Delta h)$$

$$W = [p(h + \Delta h) - p(h)] \cdot S$$

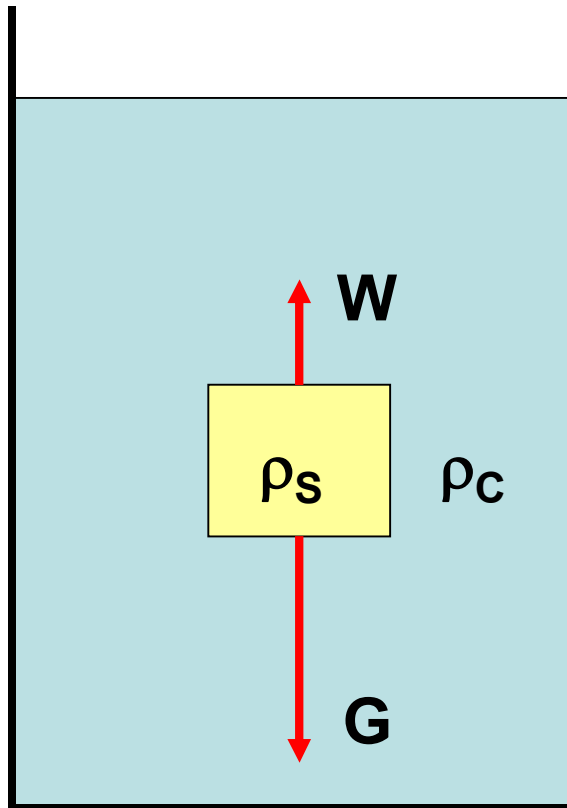
$$W = \rho_c \cdot \gamma \cdot \Delta h \cdot S = \rho_c \cdot V \cdot \gamma$$

$$G = \rho_s \cdot S \cdot \Delta h \cdot \gamma = \rho_s \cdot V \cdot \gamma$$

$$F_{wyp} = G - W = \rho_s \cdot V \cdot \gamma - \rho_c \cdot V \cdot \gamma$$

Pływanie ciał zanurzonych w cieczy

$$F_{wyp} = G - W = (\rho_s - \rho_c) \cdot V \cdot \gamma$$



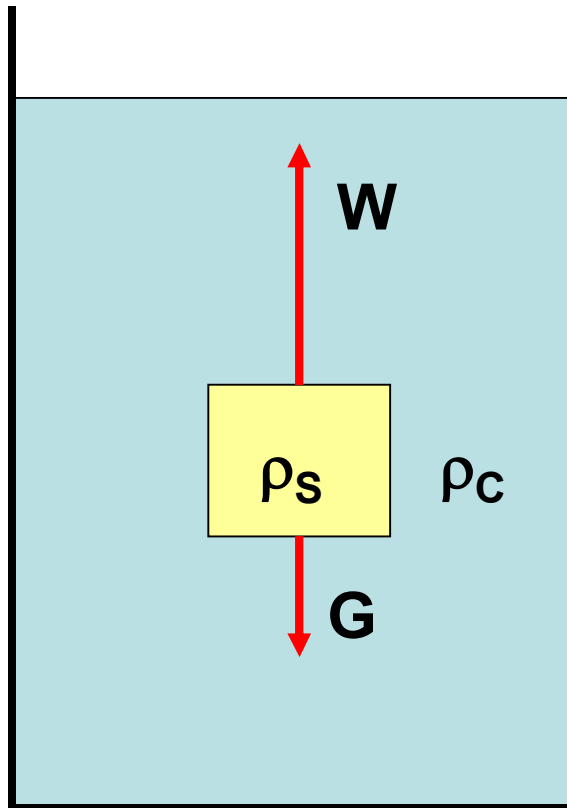
$$\rho_s > \rho_c \Rightarrow F_{wyp} > 0 \Rightarrow G > W$$



Ciało zanurzone w cieczy tonie.

Pływanie ciał zanurzonych w cieczy

$$F_{wyp} = G - W = (\rho_s - \rho_c) \cdot V \cdot \gamma$$



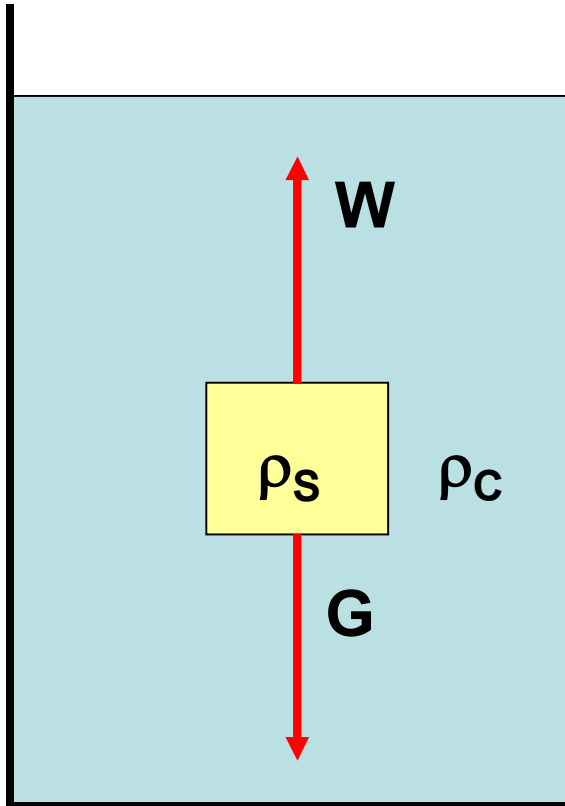
$$\rho_s < \rho_c \Rightarrow F_{wyp} < 0 \Rightarrow G < W$$



Ciało zanurzone w cieczy wypływa na powierzchnię.

Pływanie ciał zanurzonych w cieczy

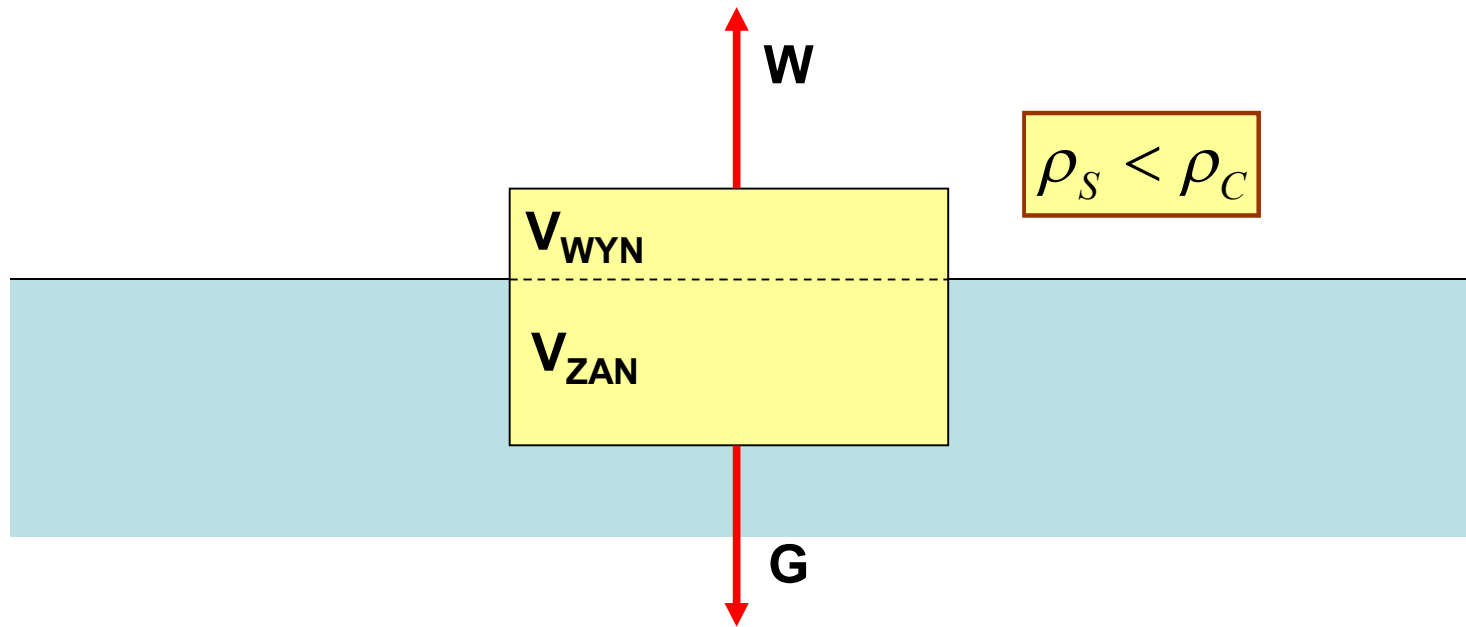
$$F_{wyp} = G - W = (\rho_s - \rho_c) \cdot V \cdot \gamma$$



$$\rho_s = \rho_c \Rightarrow F_{wyp} = 0 \Rightarrow G = W$$

Ciało unosi się swobodnie w cieczy

Pływanie ciał po powierzchni cieczy



$$W = \rho_C \cdot V_{ZANI} \cdot \gamma$$

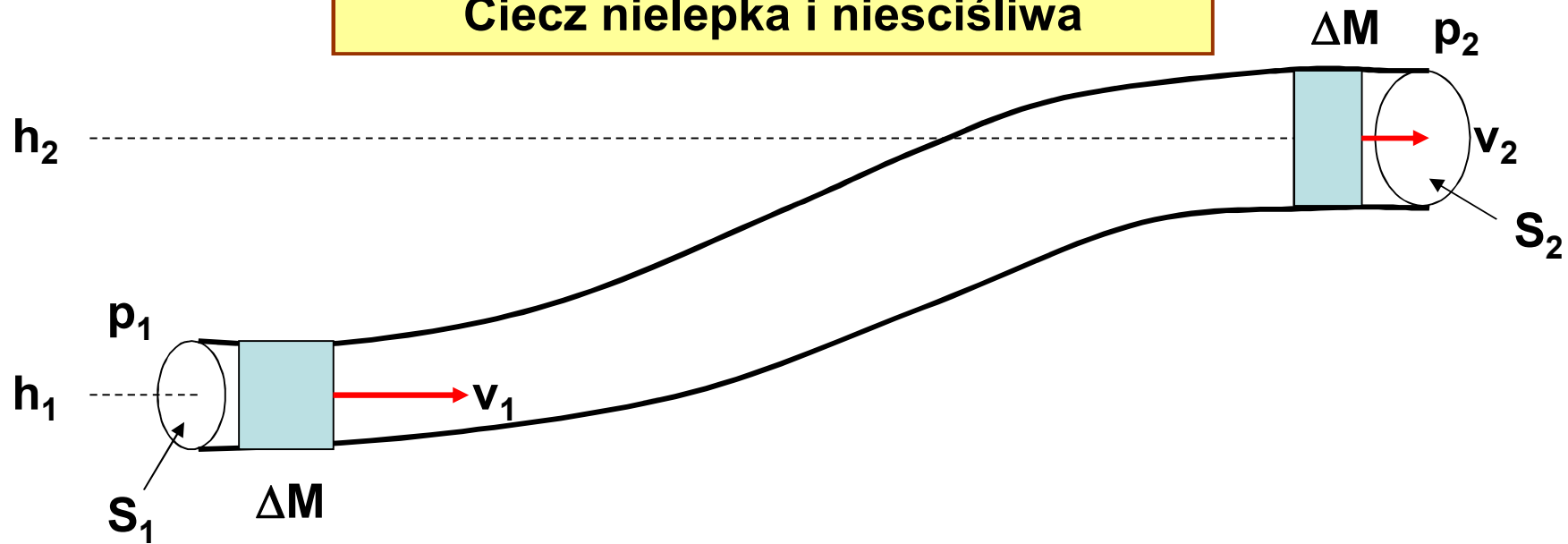
$$G = \rho_S \cdot V_{CAŁ} \cdot \gamma$$

$$W = G \Rightarrow \rho_S \cdot V_{CAŁ} = \rho_C \cdot V_{ZANI}$$

$$\frac{V_{ZANI}}{V_{CAŁ}} = \frac{\rho_S}{\rho_C}$$

Równanie Bernoulliego

Ciecz nielepka i niesciśliwa



Energia cieczy wpływającej

$$E_1 = \frac{1}{2} \Delta M \cdot v_1^2 + \Delta M \cdot \gamma \cdot h_1$$

Energia cieczy wypływającej

$$E_2 = \frac{1}{2} \Delta M \cdot v_2^2 + \Delta M \cdot \gamma \cdot h_2$$

$$\Delta E_C = E_2 - E_1 = L_p$$

Równanie Bernoulliego

Praca wykonana przez siłę parcia
na przesunięciu elementu cieczy

$$L = \Delta p \cdot \Delta V = (p_1 - p_2) \cdot \frac{\Delta M}{\rho}$$



$$\frac{1}{2} \Delta M \cdot v_2^2 + \Delta M \cdot \gamma \cdot h_2 - \frac{1}{2} \Delta M \cdot v_1^2 - \Delta M \cdot \gamma \cdot h_1 = p_1 \cdot \frac{\Delta M}{\rho} - p_2 \cdot \frac{\Delta M}{\rho}$$



$$p_2 \cdot + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot \gamma \cdot h_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot \gamma \cdot h_1$$

Prawo Bernoulliego

W stacjonarnym polu prędkości suma energii kinetycznej i potencjalnej oraz pracy wykonywanej przy przemieszczaniu elementu ciecży jest stała wewnątrz rurki prądu.

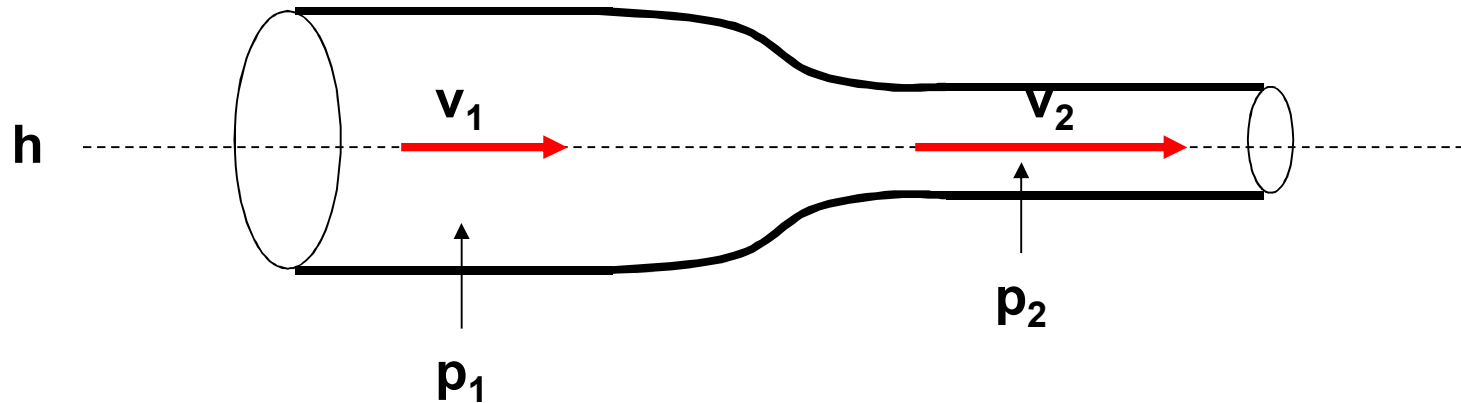
$$p + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 + \rho \cdot \gamma \cdot h = \text{const}$$

Ciśnienie
wewnętrzne

Ciśnienie
dynamiczne

Ciśnienie
hydrostatyczne

Zastosowanie równania Bernoulliego



$$p_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot \gamma \cdot h = p_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot \gamma \cdot h$$

$$p_2 = p_1 - \frac{1}{2} \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2) = p_1 - \frac{1}{2} \rho \cdot v_{sr} \cdot (v_2 - v_1)$$

$$v_2 > v_1 \Rightarrow p_2 < p_1$$

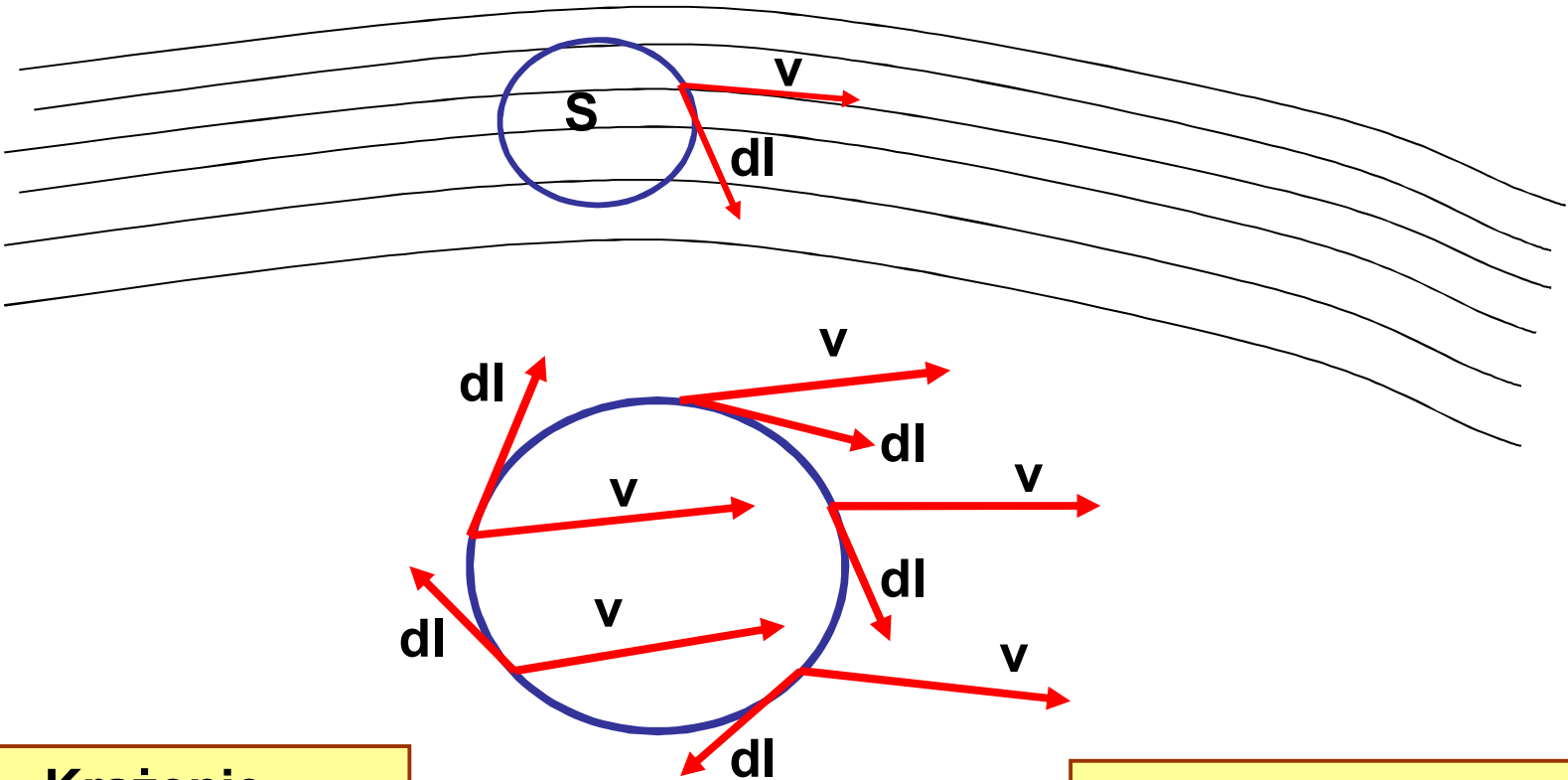
Zastosowanie równania Bernoulliego

$$p_2 = p_1 - \frac{1}{2} \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2)$$

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho}}$$

Krażenie cieczy



Krażenie

$$R = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

Gęstość wirów

$$\Omega = \frac{1}{S} \oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

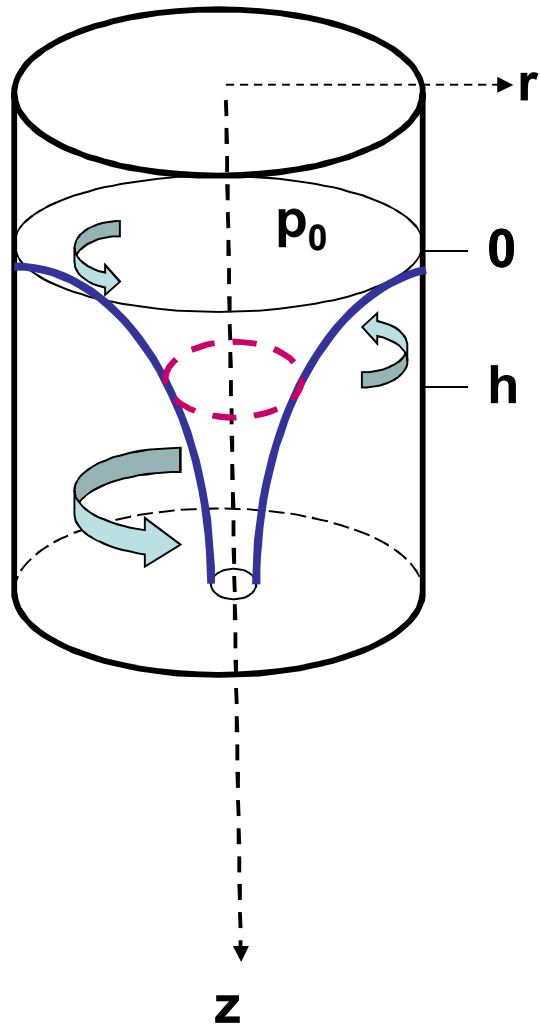
Przepływ bezwirowy

$$\Omega = \frac{1}{S} \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0$$

w całej objętości cieczy

W cieczy nielepkiej nie można wytworzyć ruchu wirowego ze względu na brak możliwości wytworzenia naprężeń stycznych.

Z zasady zachowania momentu pędu wynika, że jeśli ruch cieczy nielepkiej był od początku bezwirowy to pozostaje on trwale bezwirowy.



Wyływ ciecży przez otwór w dnie

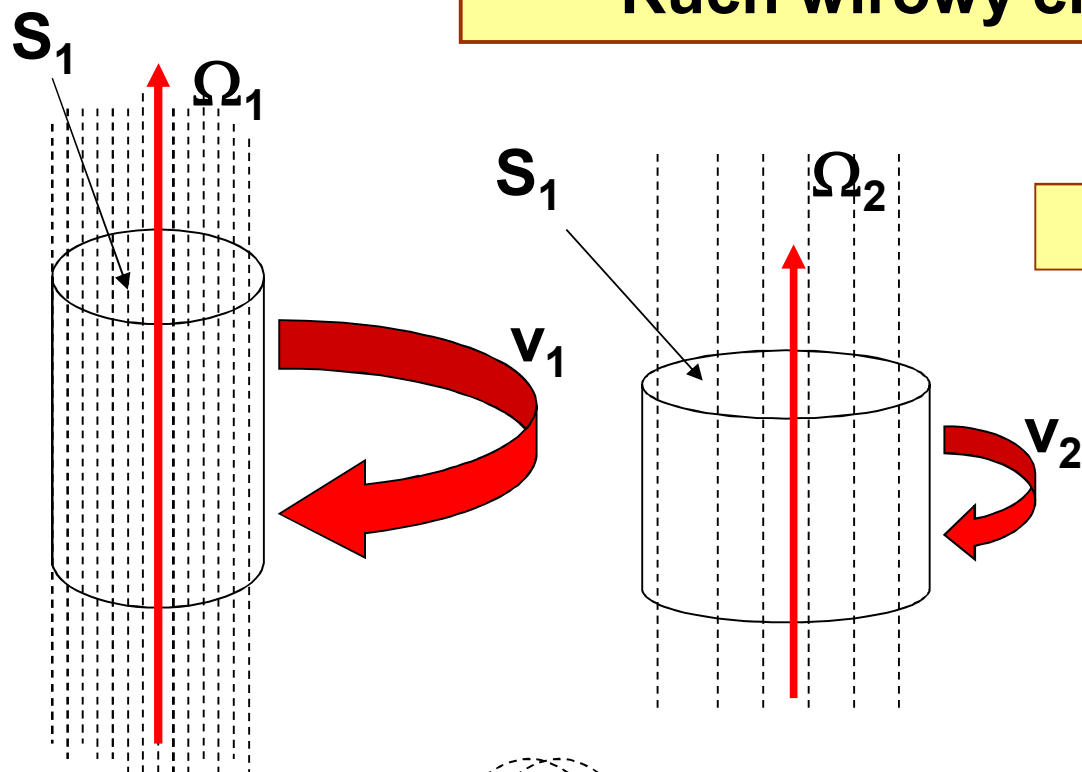
$$\frac{1}{2} \rho \cdot v_h^2 + \rho \cdot \gamma \cdot h = p_0 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_0^2 = C'$$

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = 2\pi \cdot r \cdot v = C$$

$$v = \frac{C}{2\pi \cdot r}$$

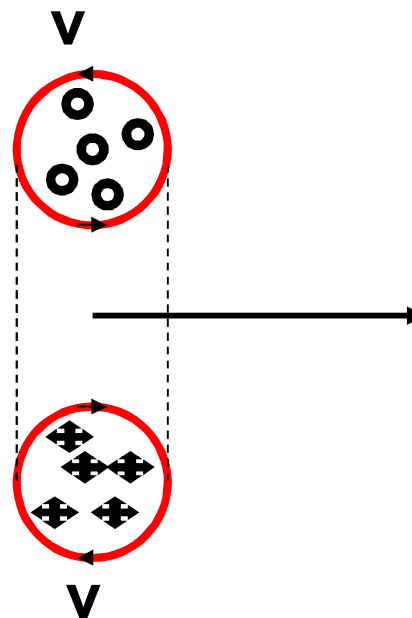
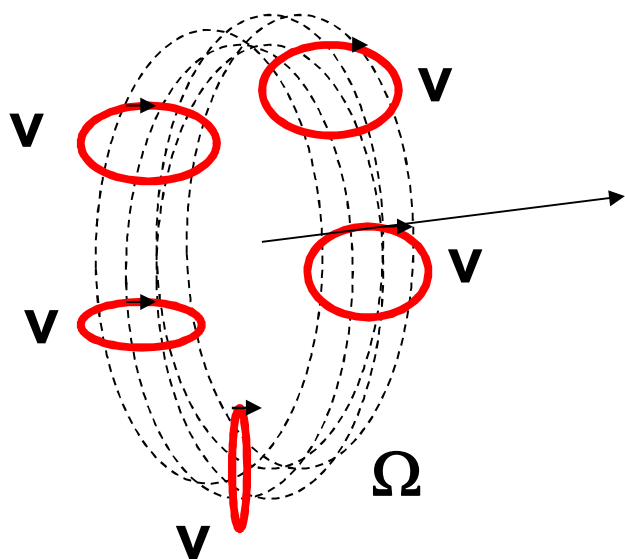
$$h + \frac{k_1}{r^2} = k_2$$

Ruch wirowy cieczy

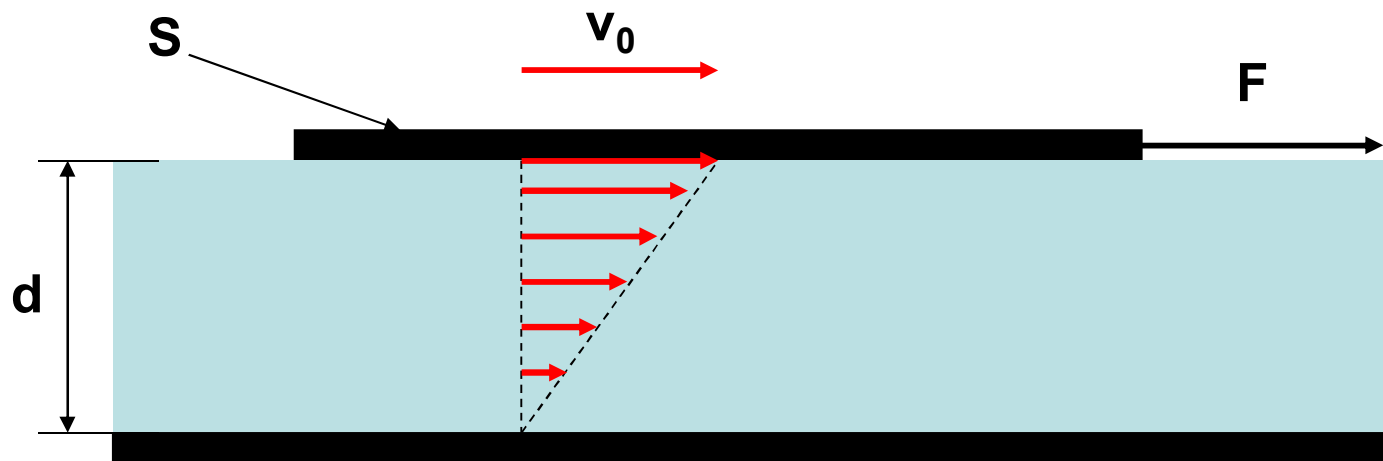


Prawa Helmholtza

$$\Omega_1 \cdot S_1 = \Omega_2 \cdot S_2$$



Lepkość cieczy



$$\frac{F}{S} = \eta \cdot \frac{v_0}{d}$$

η - współczynnik lepkości
[N s / m²] = [Pa·s]

η/ρ - lepkość właściwa
[m²/s]

Lepkość cieczy

Woda (20° C)

$$\eta = 1000 \text{ N} \cdot \text{s} / \text{m}^2$$

Woda (20° C)

$$\eta / \rho = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

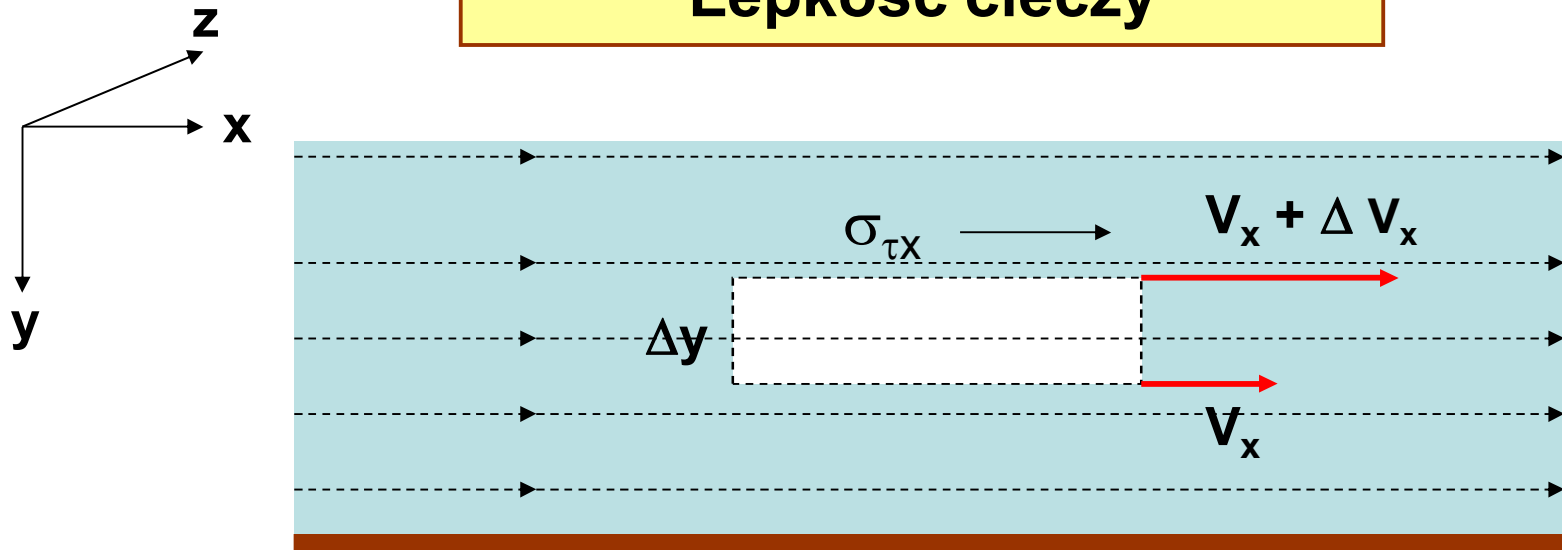
Powietrze (20° C)

$$\eta / \rho = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

Woda (0° C)

$$\eta / \rho = 1,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

Lepkość cieczy



$$\sigma_{\tau x} = \eta \cdot \frac{\Delta v_x}{\Delta y} \Rightarrow \sigma_{\tau x} = \eta \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

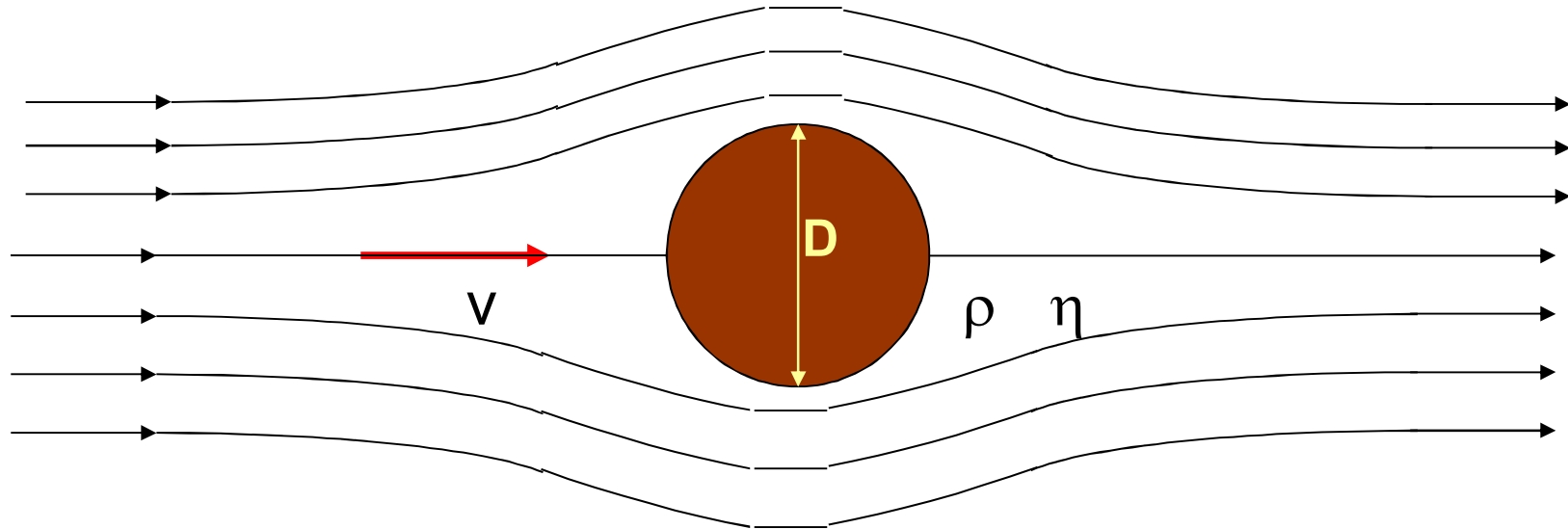
$$\sigma_{\tau y} = \eta \cdot \frac{\Delta v_y}{\Delta x} \Rightarrow \sigma_{\tau y} = \eta \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

$$\sigma_{xy} = \eta \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

$$\sigma_{xz} = \eta \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)$$

$$\sigma_{zy} = \eta \cdot \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)$$

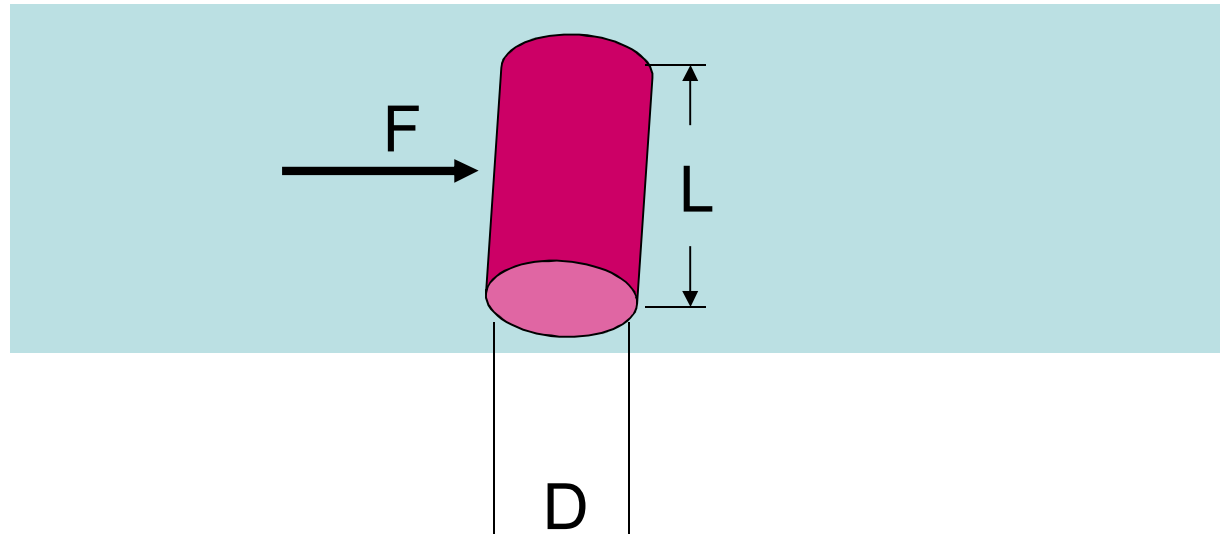
Liczba Reynoldsa



$$R = \frac{\rho}{\eta} \cdot v \cdot D$$

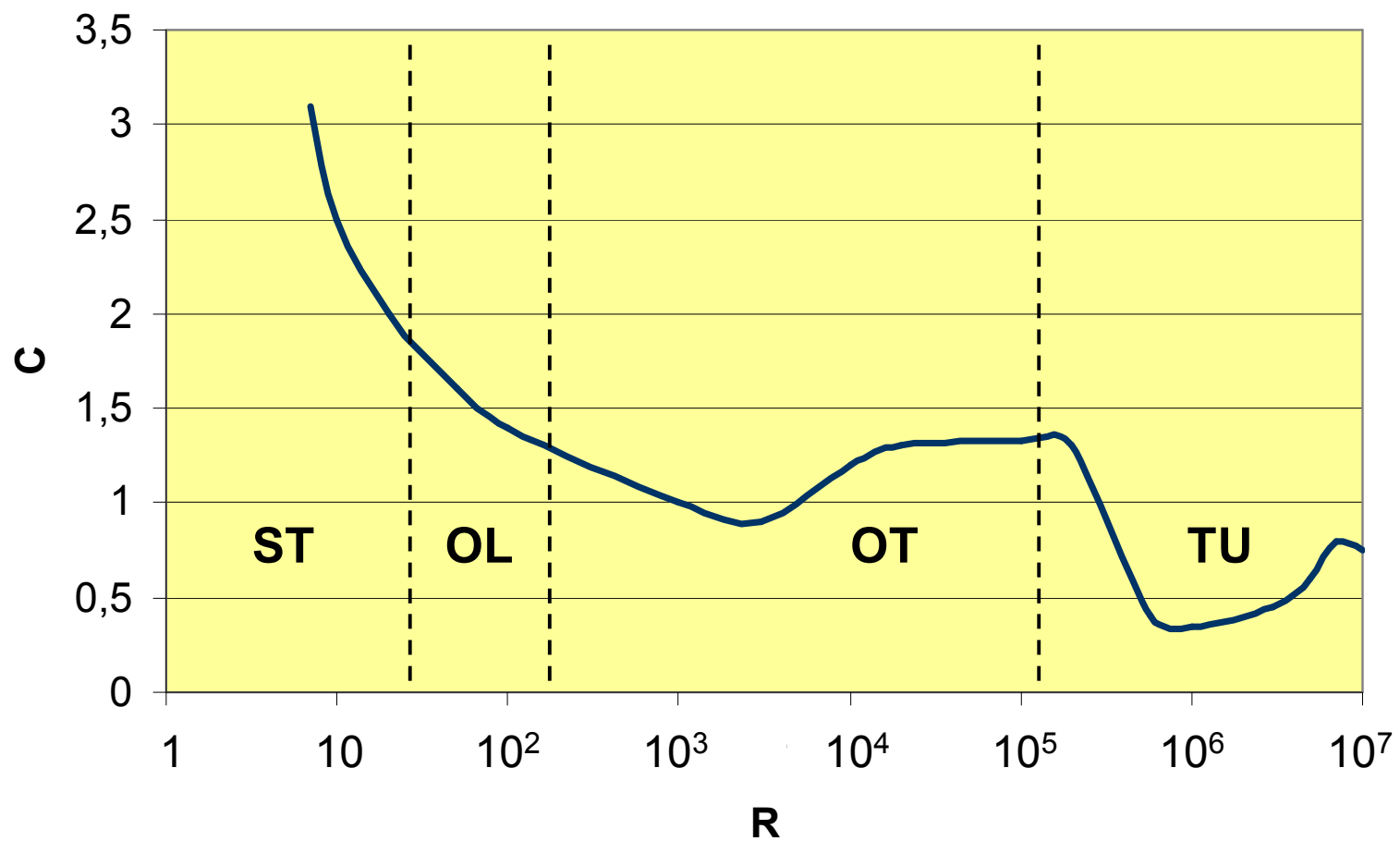
$$\frac{\rho_1}{\eta_1} \cdot v_1 \cdot D_1 = R = \frac{\rho_2}{\eta_2} \cdot v_2 \cdot D_2$$

Współczynnik oporu czołowego

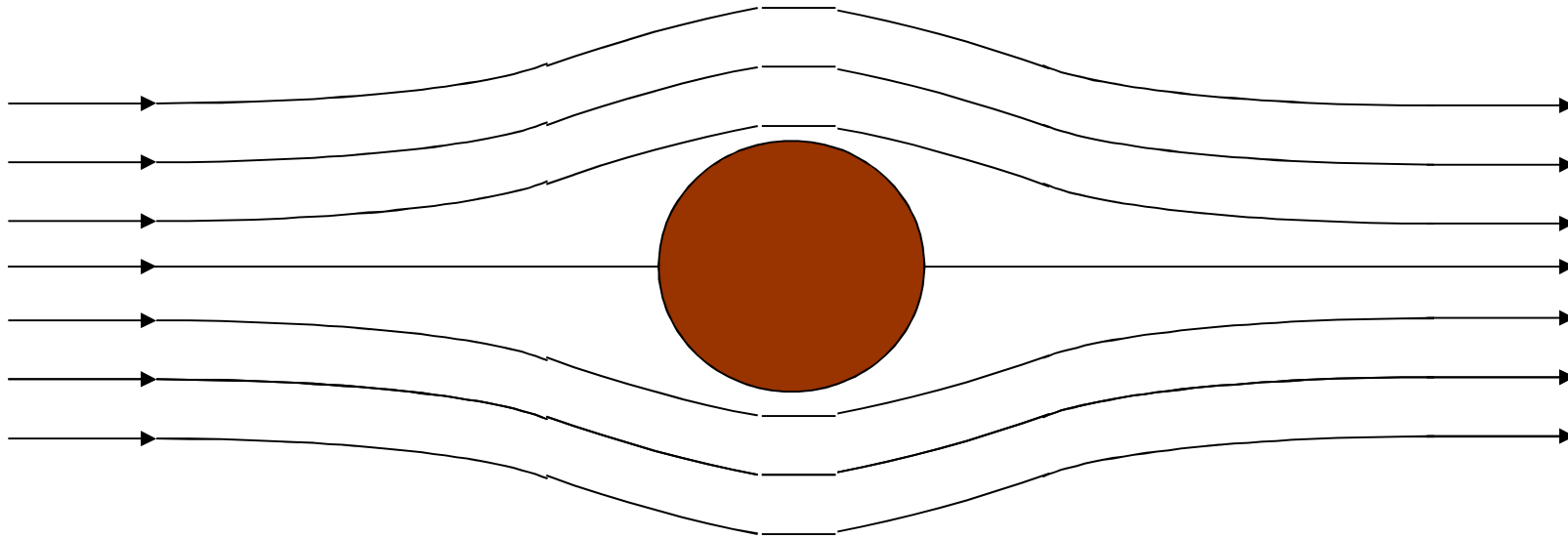


$$C_D = \frac{F}{E_k \cdot S} = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho v^2 \cdot D \cdot L}$$

Opór czołowy walca

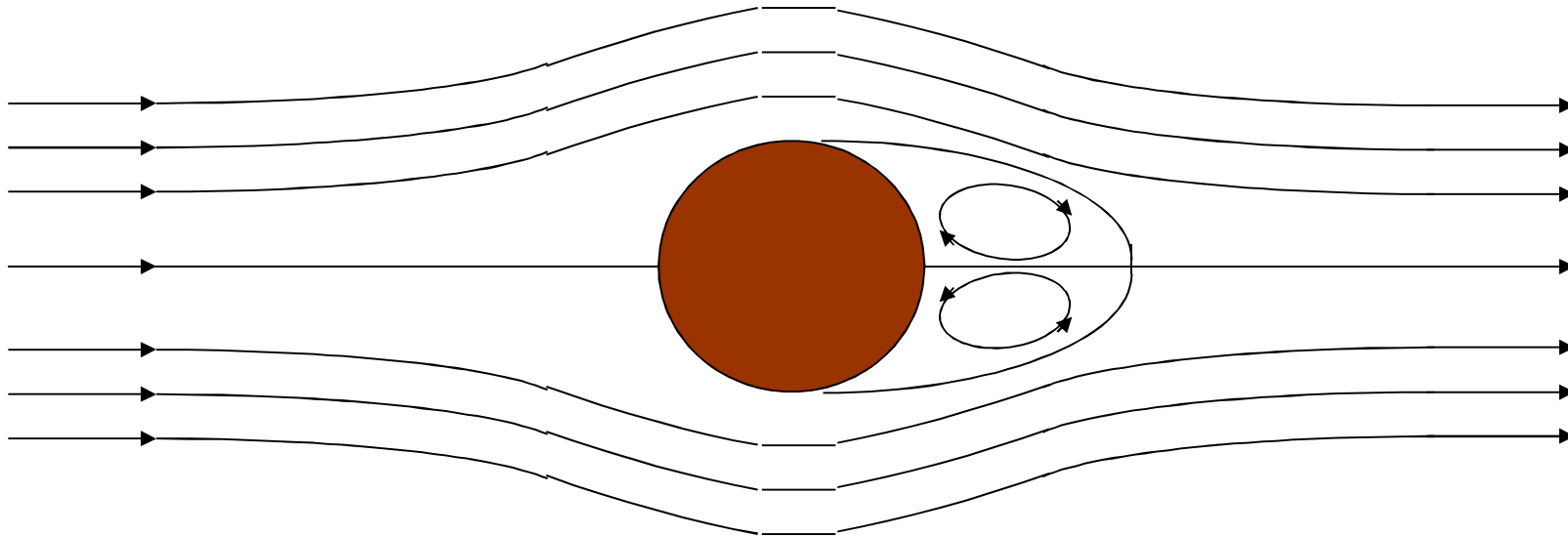


Opływ walca dla różnych liczb Reynoldsa



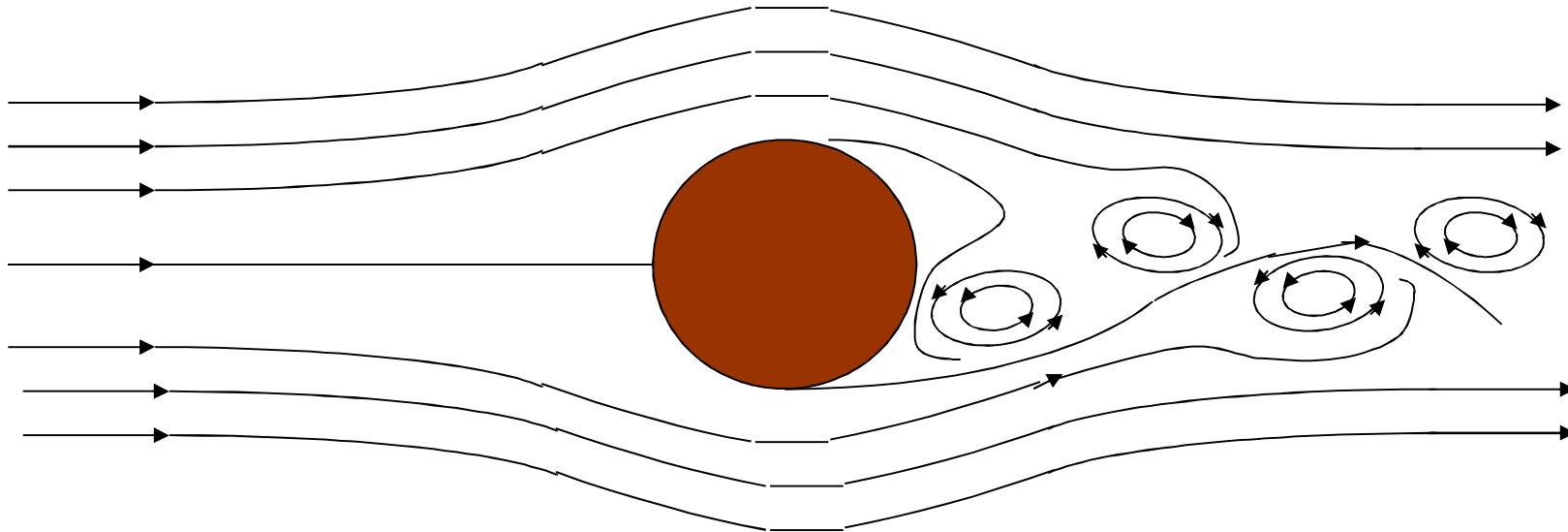
$$R = 10^{-2}$$

Opływ walca dla różnych liczb Reynoldsa



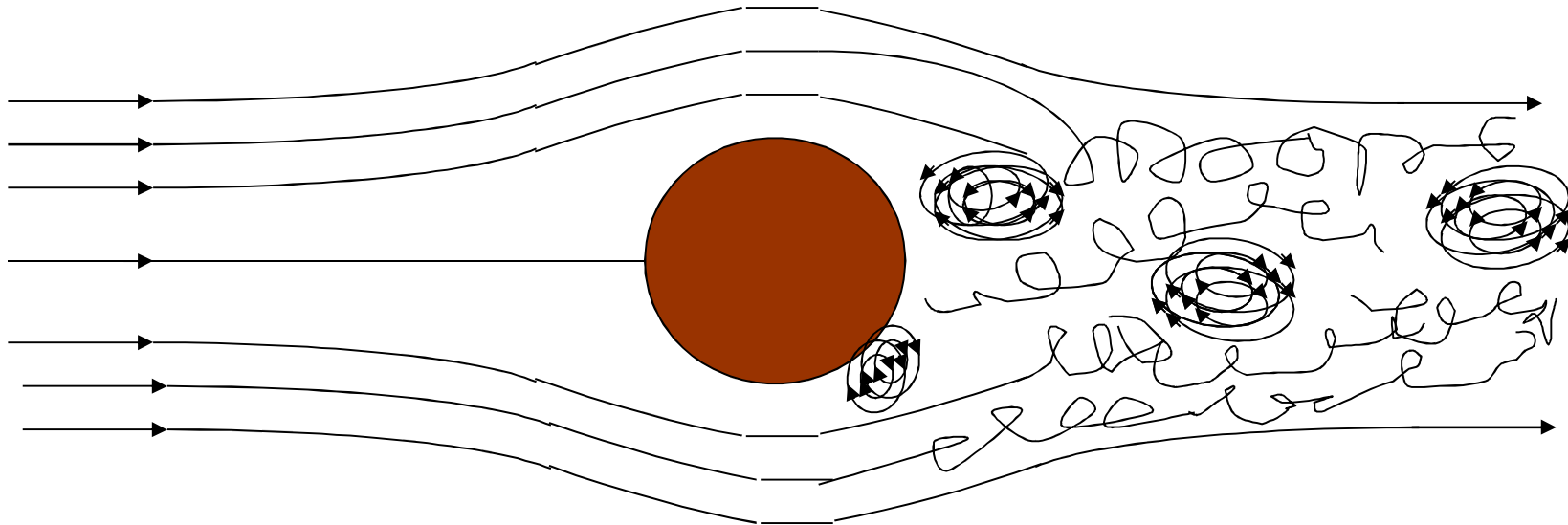
$R = 20$

Opływ walca dla różnych liczb Reynoldsa



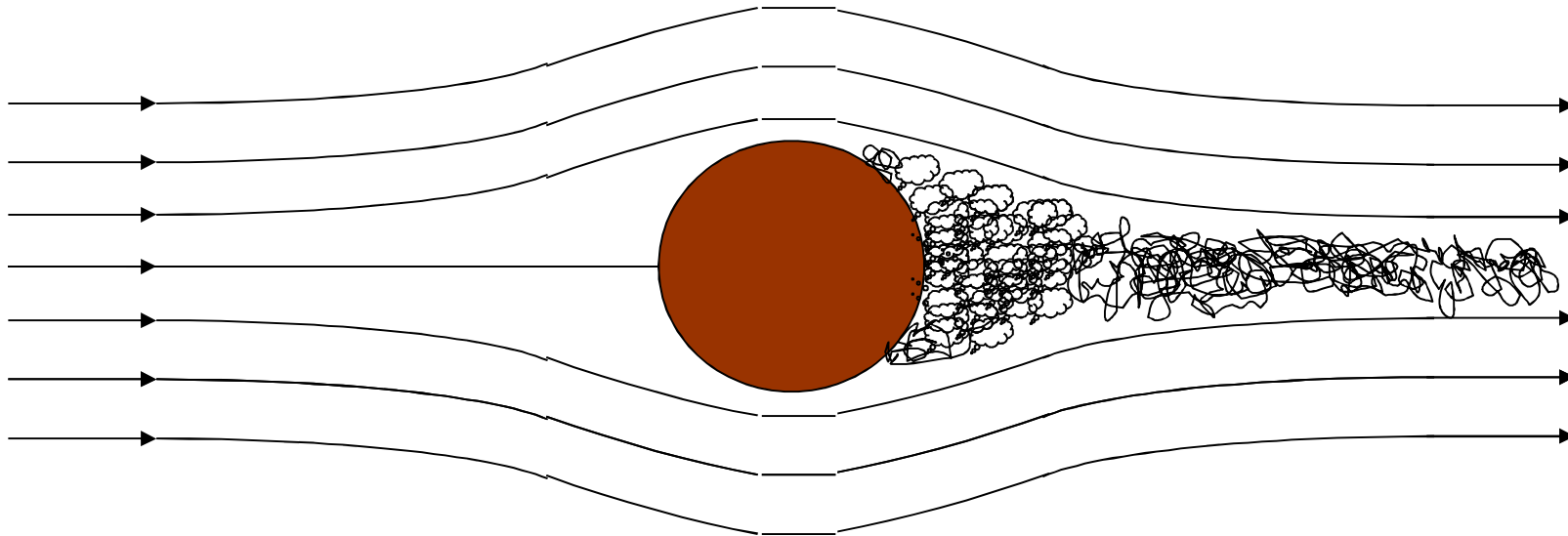
$R = 50$

Opływ walca dla różnych liczb Reynoldsa



$$R = 10^4$$

Opływ walca dla różnych liczb Reynoldsa



$$R = 10^6$$