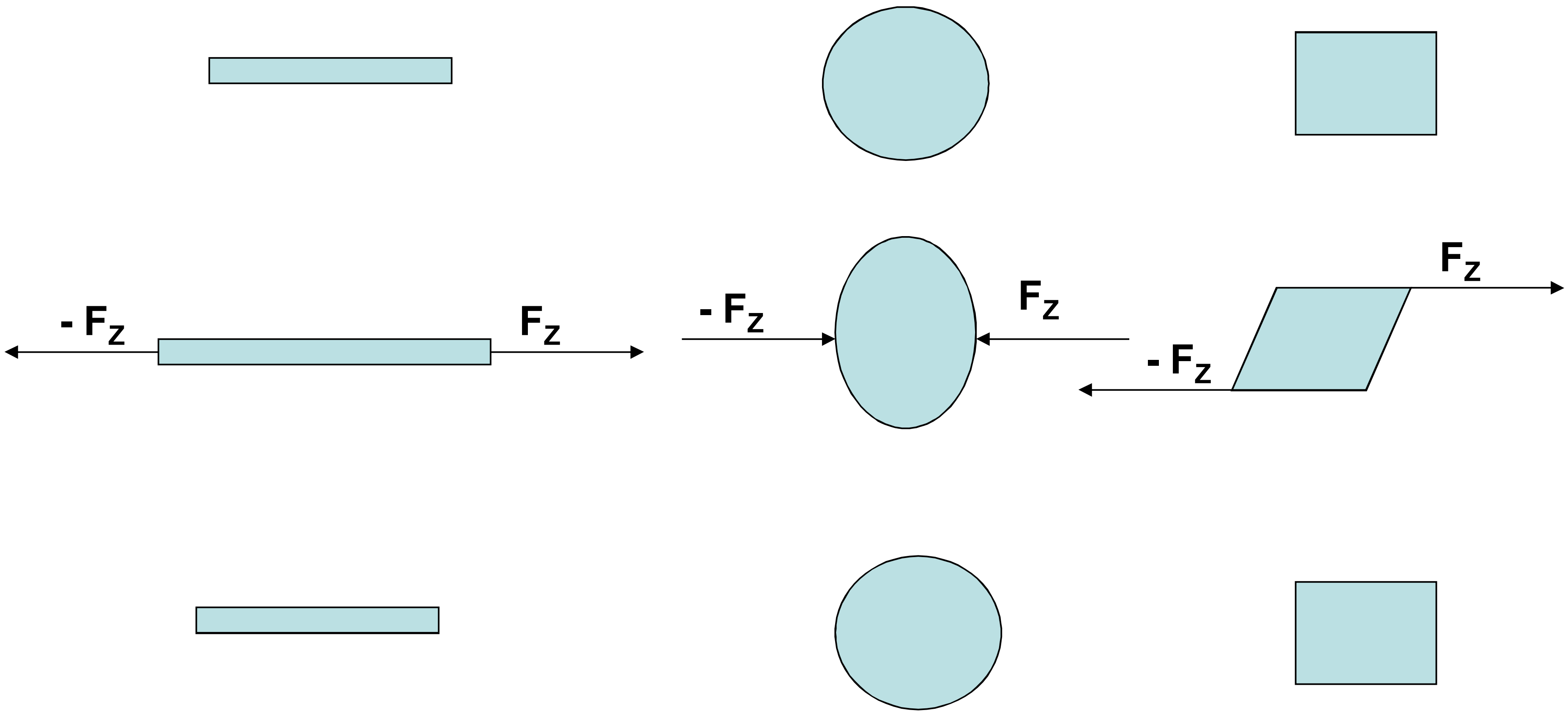
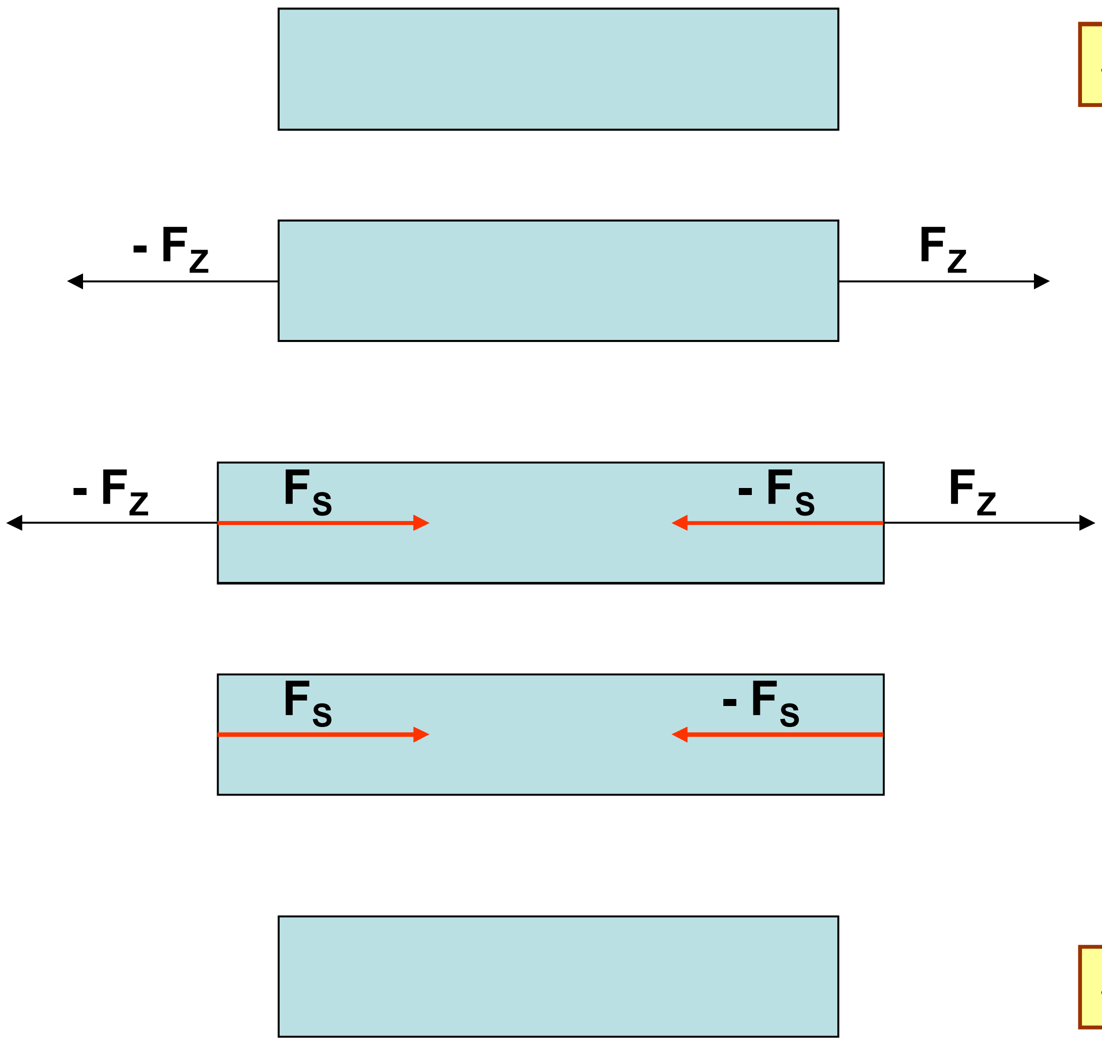
Teoria sprężystości

Ciało sprężyste – bryła, która pod wpływem działających sił zewnętrznych ulega deformacji – zmienia swój kształt i/lub objętość i wraca do pierwotnej postaci po ustaniu działania tych sił.



Siły sprężystości



Stan równowagi sił sprężystości

Naruszenie stanu równowagi

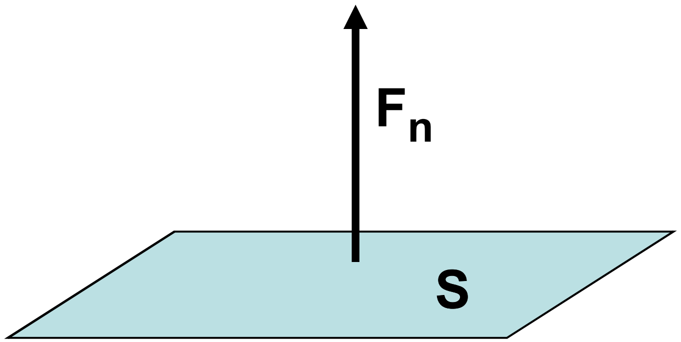
Nowy stan równowagi

Naruszenie stanu równowagi

Stan równowagi sił sprężystości

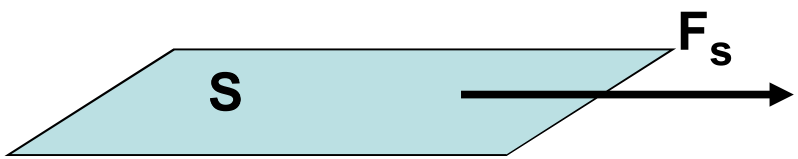
Naprężenia

Naprężenie – stosunek działającej siły do pola powierzchni na którą działa.



Naprężenie normalne

$$\sigma = \frac{F_n}{S}$$



Naprężenie styczne

$$\tau = \frac{F_s}{S}$$

Przy braku oddziaływań zewnetrznych wewnętrzne siły spójności równoważą się co powoduje nadaniu ciała określonego kształtu i rozmiarów. Ciało znajduje się w równowadze.

Zmiana naprężeń zewnętrznych powoduje reakcję sił wewnętrznych i ustalenie się nowego stanu równowagi. Związane jest to ze zmianą wymiarów geometrycznych ciała które nazywamy odkształceniem.

Jeżeli odkształcenia znikają całkowicie po ustąpieniu naprężeń to ciało nazywamy idealnie sprężystym, jeśli nie to lepko-sprężystym. Ciało w którym następują odkształcenia trwałe nazywamy plastycznym.

Prawo Hooke'a

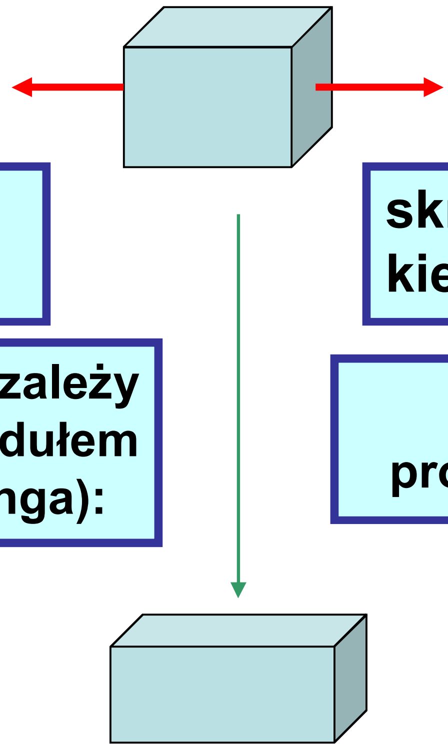
Jeśli wartości naprężeń nie przekraczają pewnych wartości granicznych wówczas odkształcenia są wprost proporcjonalne do działających naprężeń

Związek pomiędzy przyłożonym naprężeniem zewnętrznym a deformacją określony jest przez własności sprężyste ośrodka, charakteryzowane modułami sprężystości.

Odkształcenie liniowe:

przyłożone naprężenie – jednoosiowe normalne

boczne powierzchnie deformowanego elementu - swobodne



wydłużenie elementu w kierunku σ_n

Wydłużenie dla danego σ_n zależy od wielkości nazywanej modułem sprężystości podłużnej (Younga):

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \sigma_n$$

E - moduł Younga
Δl – wydłużenie
l – długość elementu

skrócenie wymiarów w kierunkach prostopadłych

Skrócenie boczne jest proporcjonalne do wydłużenia:

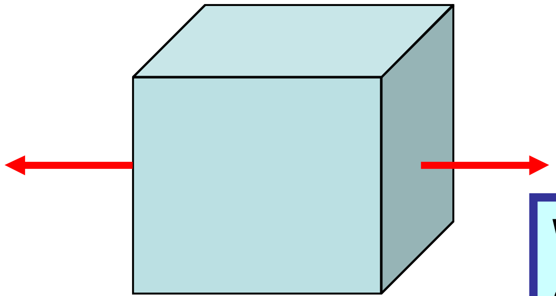
$$\frac{\Delta h}{h} = \nu \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

ν- współczynnik Poissona

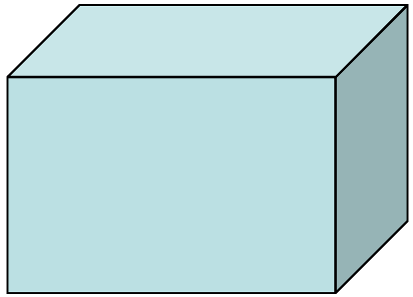
$$\nu \leq \frac{1}{2}$$

przyłożone naprężenie – jednoosiowe normalne

boczne powierzchnie deformowanego elementu – sztywno zamocowane



wydłużenie elementu w kierunku σ_n



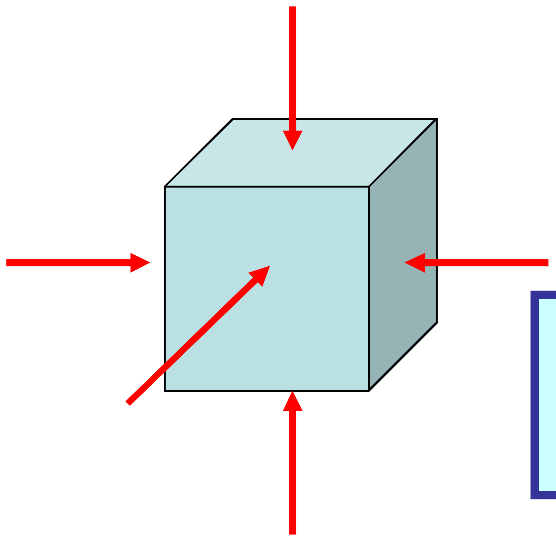
Wydłużenie dla danego σ_n zależy od wielkości nazywanej modułem sprężystości jednoosiowej

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{\Psi} \cdot \sigma_n$$

ψ- moduł sprężystości jednoosiowej;
Δl – wydłużenie
l – długość elementu

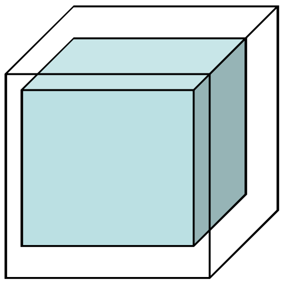
Odkształcenie objętościowe:

przyłożone naprężenia – normalne działające jednakowo ze wszystkich kierunków (naprężenia litostatyczne „p”)



izotropowa zmiana objętości ośrodka

Zmiana objętości dla danego *p* zależy od wielkości nazywanej modułem ściśliwości



$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{K} \cdot p$$

K – moduł ściśliwości

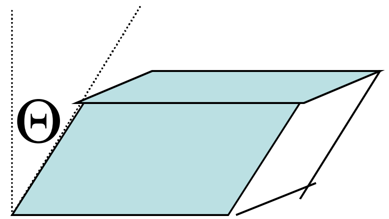
ΔV – zmiana objętości

V – objętość elementu

Odkształcenie postaciowe:

przyłożone naprężenia – styczne σ_t
działające na parę przeciwległych ścianek elementu

odchylenie ścianki wybranego elementu



Zmiana kąta dla danego σ_t zależy od wielkości nazywanej modułem sztywności

$$\Theta = \frac{1}{G} \cdot \sigma_t$$

G – moduł sztywności
Θ – kąt odchylenia ścianki
od jej początkowego położenia

W ciele sprężystym izotropowym i jednorodnym do scharakteryzowania jego sprężystości wystarczą dwa moduły sprężystości. Możemy wybrać dowolne dwa a pozostałe wyrazić jako ich funkcje np.:

dla *E* i ν:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \qquad \Psi = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

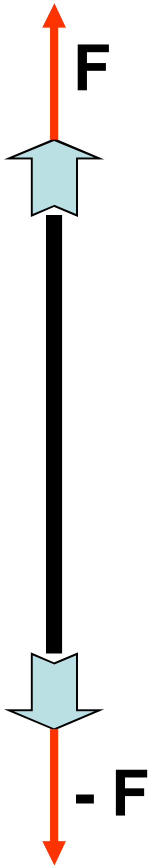
dla *K* i *G*:

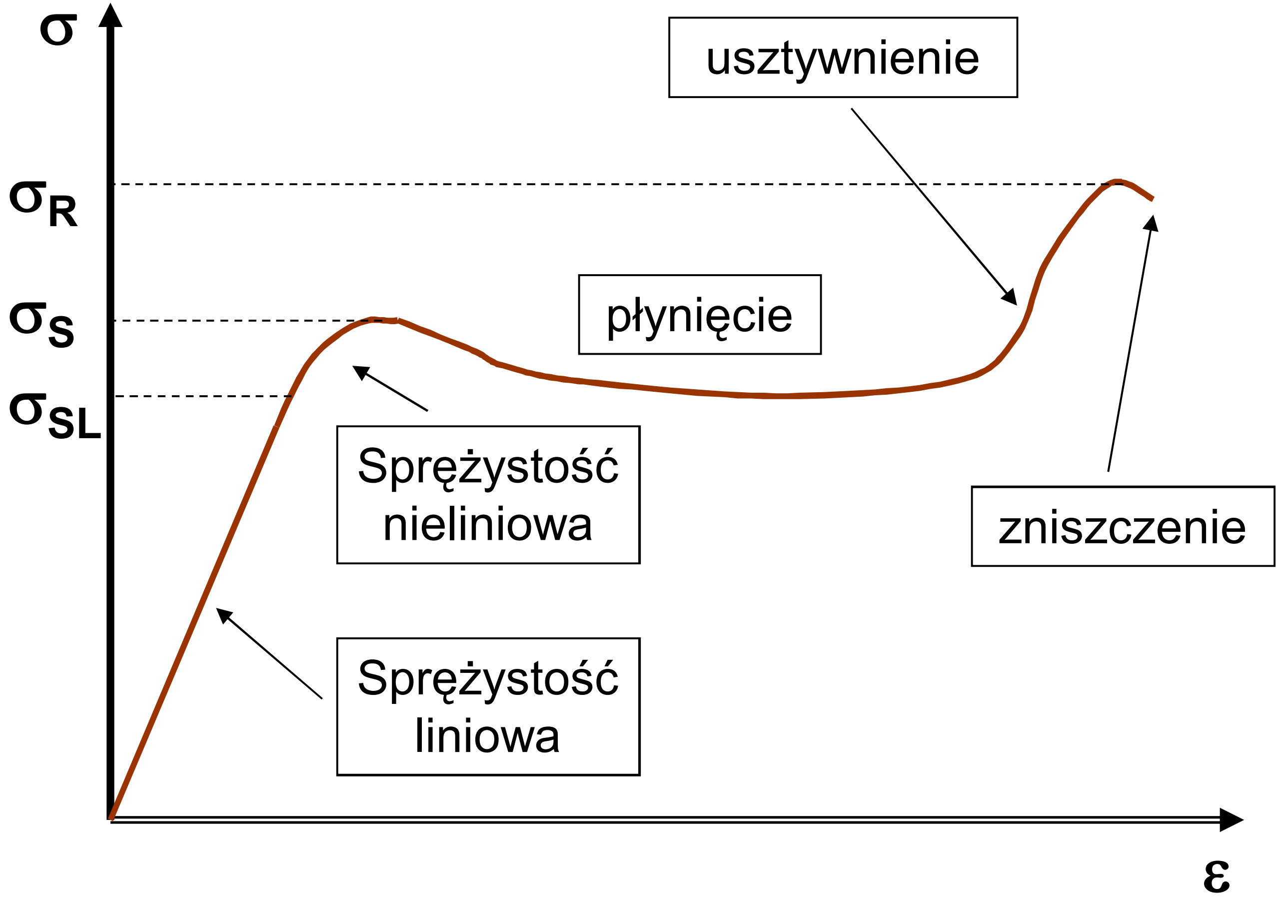
$$\Psi = K + \frac{4}{3}G$$

Wytrzymałość materiałów

$$\sigma = \frac{F_n}{S}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

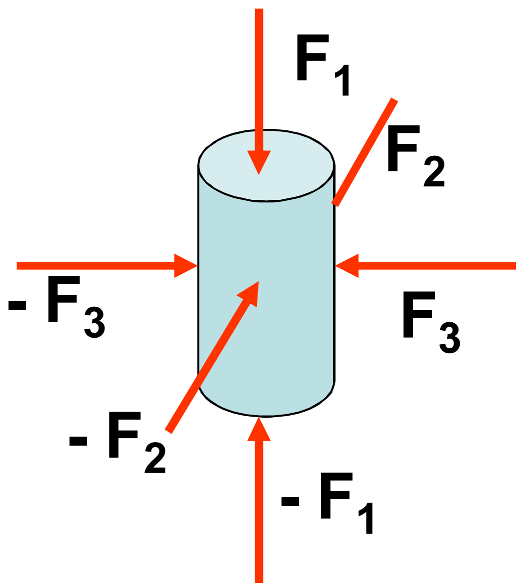


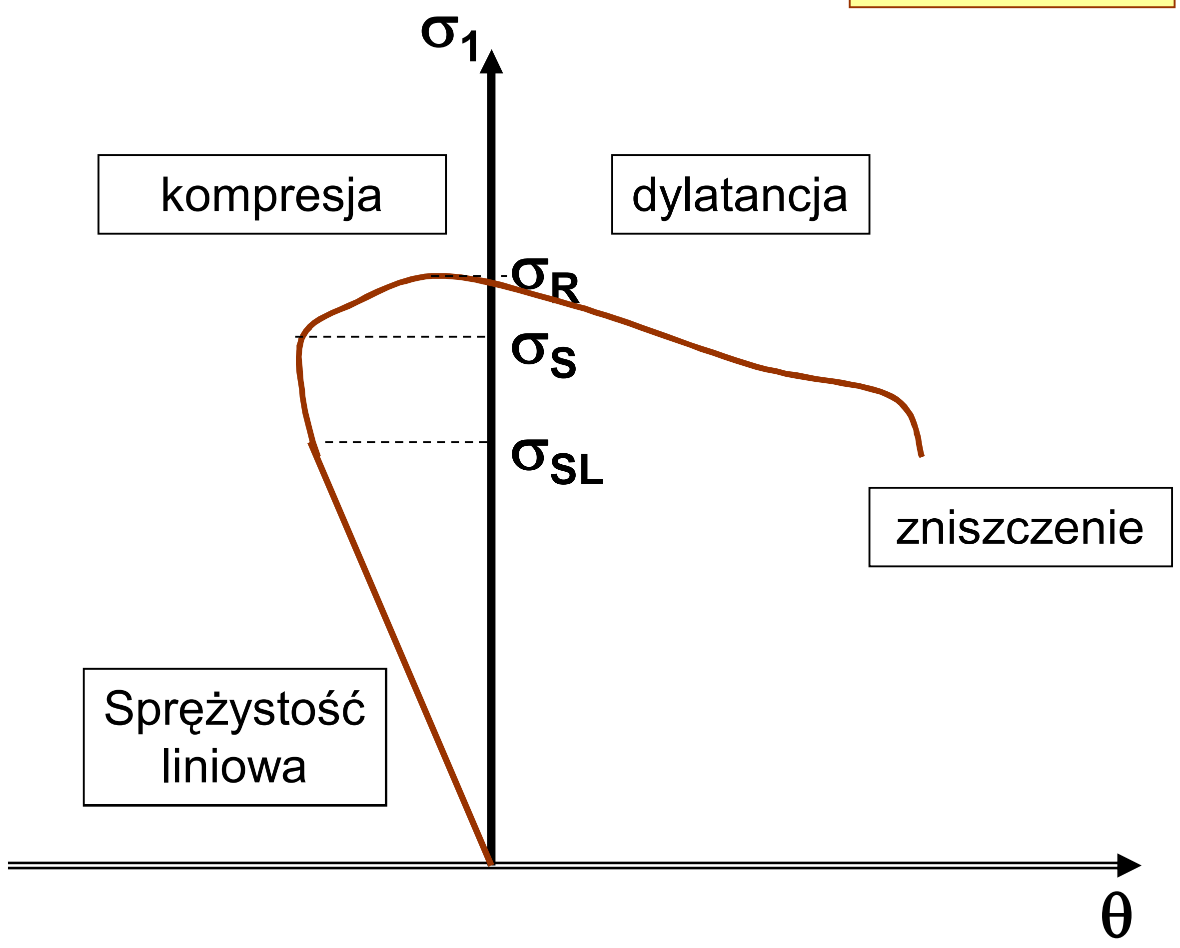


Wytrzymałość materiałów

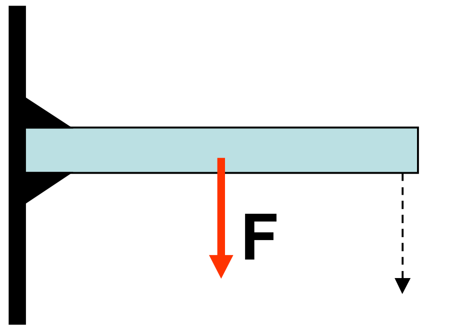
$$\sigma_i = \frac{F_{ni}}{S}$$

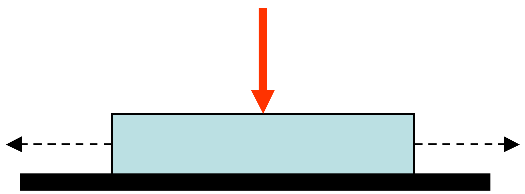
$$\theta = \frac{\Delta V}{V}$$

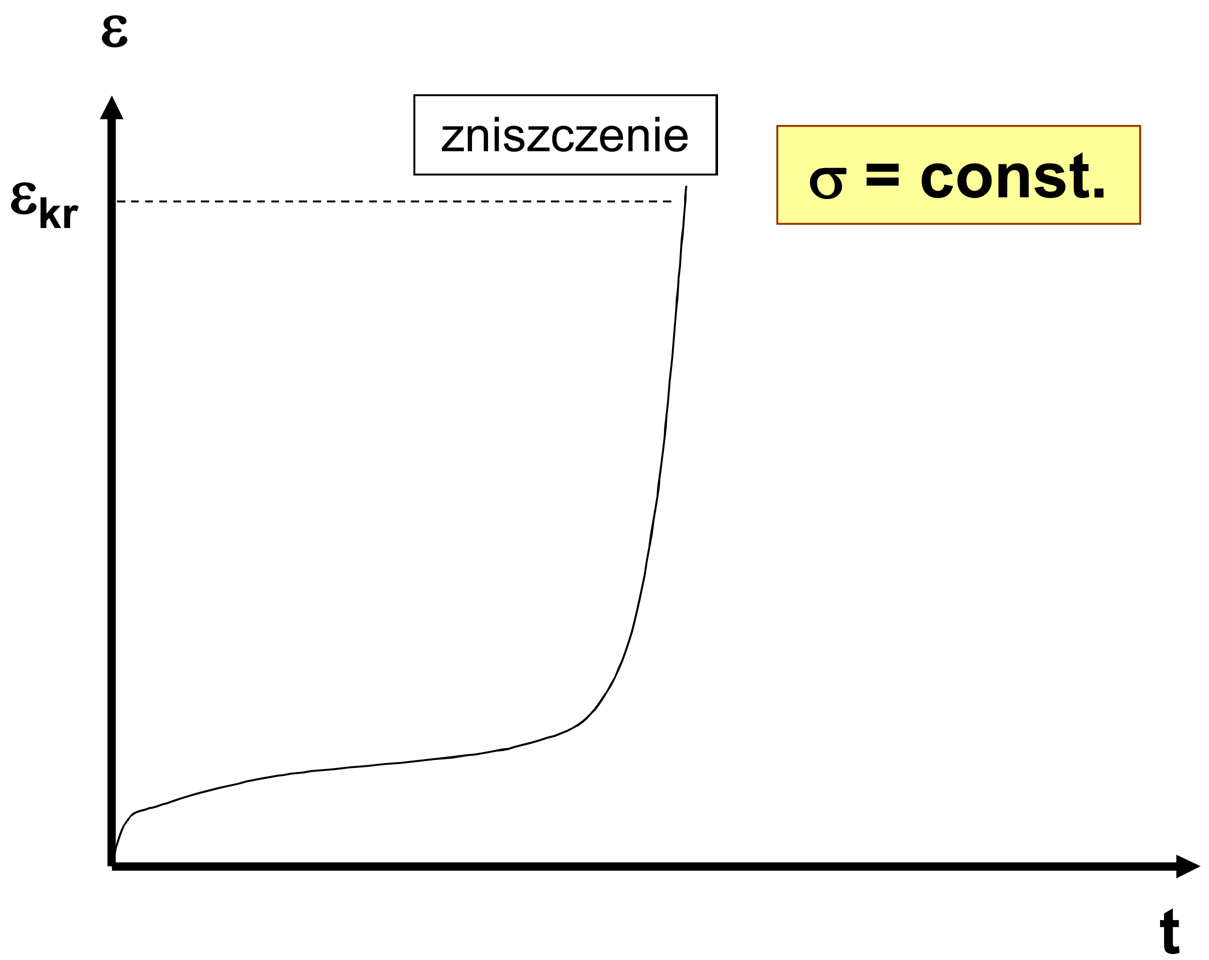




Płynięcie materiałów







σ = const.

Ciągły ośrodek sprężysty

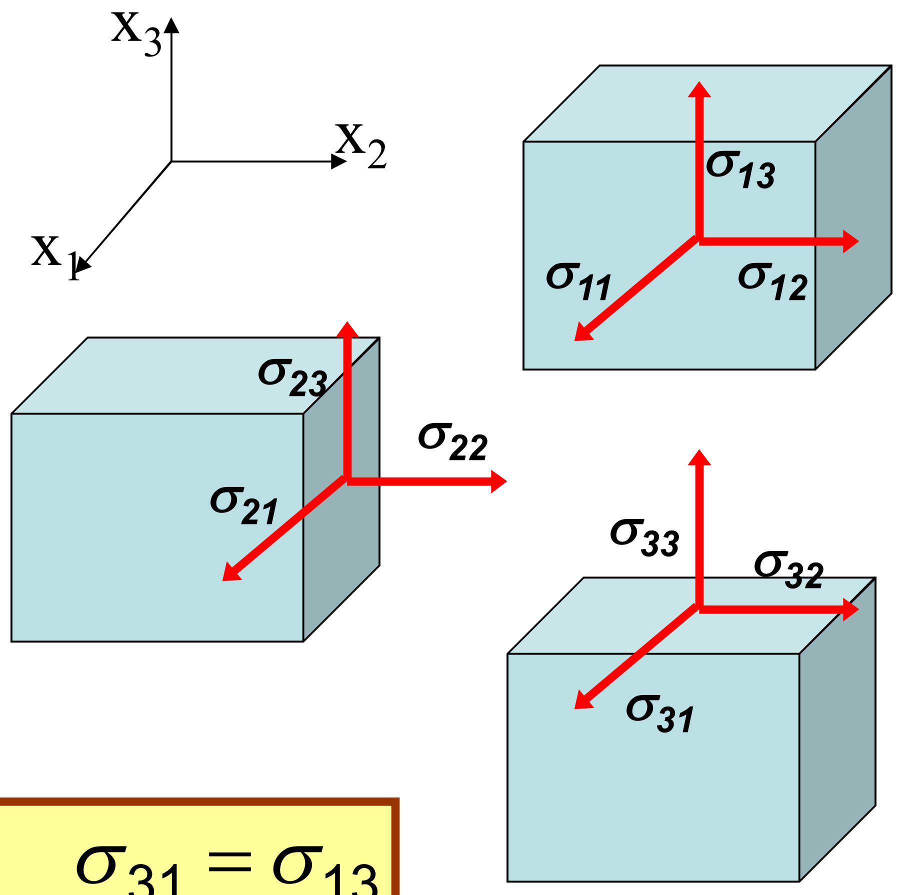
Naprężenie całkowite działające na nieskończenie mały element ośrodka ciągłego o objętości *dv* i powierzchni *ds* można opisać jeśli znamy rozkład naprężeń działających na ścianki tego elementu. Rozkład ten nazywamy **lokalnym tensorem naprężeń σ**.

Znajomość tensora pozwala określić naprężenie w dowolnym kierunku opisanym wektorem jednostkowym <u>n</u>

$$\vec{\sigma}_n = \hat{\sigma} \circ \vec{n}$$

Tensor naprężeń jest symetrycznym tensorem drugiego rzędu i zawiera dziewięć składowych, z których trzy opisują naprężenia działające prostopadle do trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyzn rozpiętych pomiędzy osiami układu współrzędnych, a pozostałe sześć – trzy pary naprężeń stycznych do tych płaszczyzn.

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$



$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \qquad \sigma_{23} = \sigma_{32} \qquad \sigma_{31} = \sigma_{13}$$

Stan naprężeń i deformacji w ośrodku ciągłym

Naprężenia lokalne działające na wybrany element z zewnątrz równoważone przez działające, wewnętrzne siły spójności powodują, że znajduje się on w równowadze.

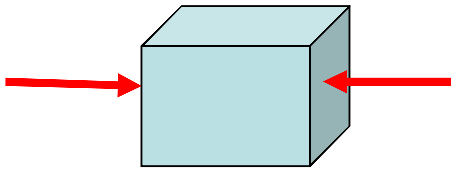
Zmiana naprężeń lokalnych powoduje reakcję sił wewnętrznych i ustalenie się nowego stanu równowagi oraz deformację danego elementu.

Zmiana stanu naprężeń działających na dany element ośrodka ciągłego będzie w wyniku działania sił sprężystości przenosić się na sąsiednie elementy zaburzając ich stan równowagi.

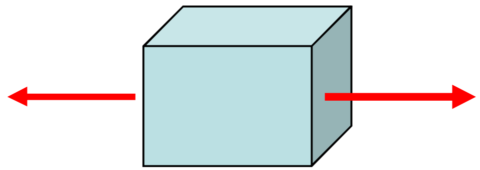
W ośrodku powstaje układ naprężeń i deformacji lokalnych.

Naprężenia ściskające i rozciągające

W geomechanice przyjęto konwencję, że naprężenia ściskające mają znak dodatni a rozciągające ujemny.



$\sigma > 0$



$\sigma < 0$

W materiałoznawstwie przyjęto konwencję, że naprężenia rozciągające mają znak dodatni a ściskające ujemny.

$\sigma > 0$

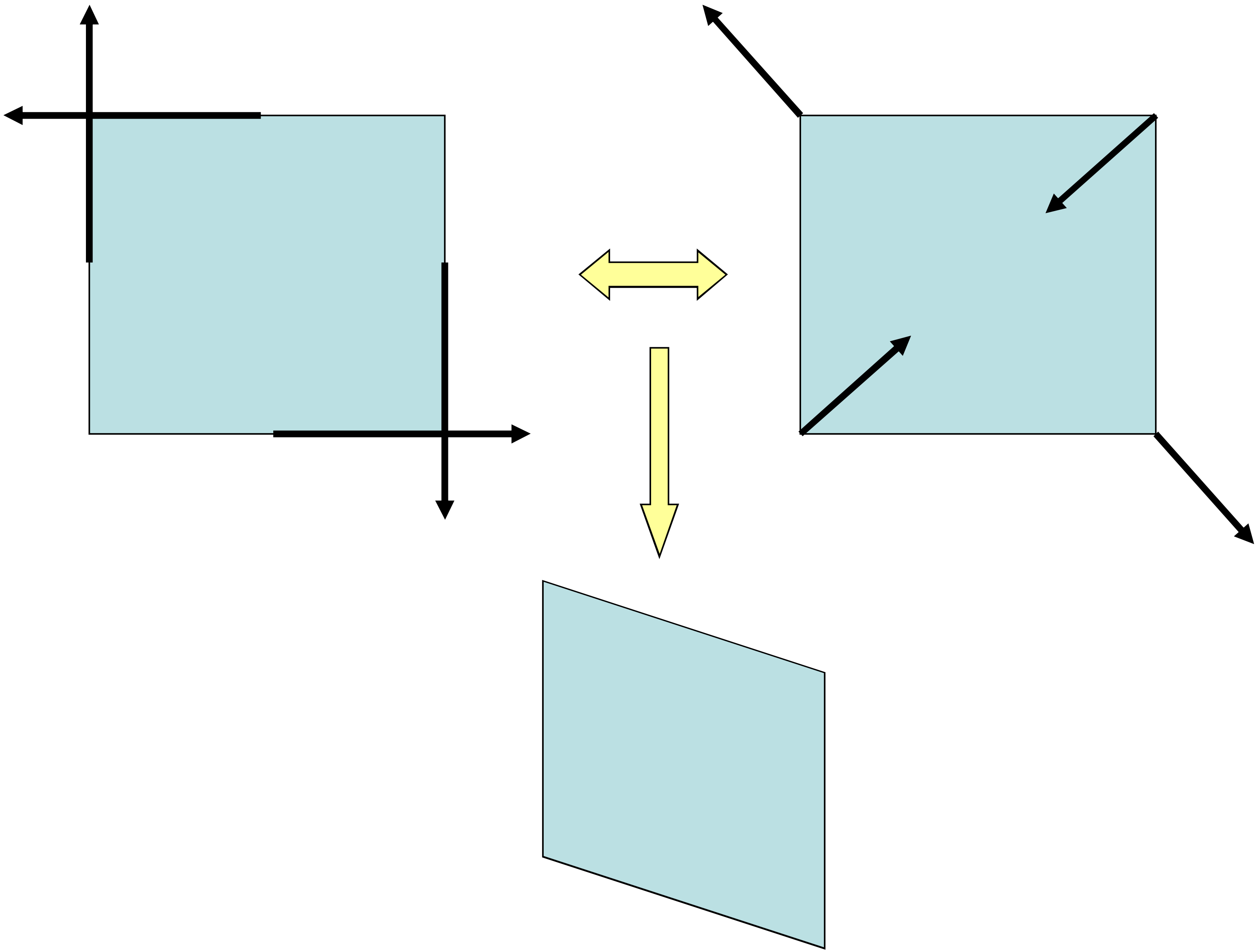
$\sigma < 0$

Tensor naprężeń, jak każdy tensor symetryczny drugiego rzędu wyznacza trzy wzajemnie prostopadłe kierunki zwane kierunkami własnymi tensora. Wybierając układ współrzędnych zgodny z tymi kierunkami redukujemy liczbę składowych tensora do trzech.

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

W układzie współrzędnych zgodnym z kierunkami własnymi tensora do opisu stanu naprężeń wystarczą trzy naprężenia normalne zwane naprężeniami głównym. Osie układu współrzędnych numerujemy tak aby σ_1 było największym naprężeniem głównym a σ_3 najmniejszym naprężeniem głównym.

Równoważne układy naprężeń



Naprężenia różnicowe

Zgodnie z regułą dodawania tensorów każdy tensor można przedstawić jako sumę dwóch tensorów. W geomechanice najczęstszym sposobem dekompozycji tensora naprężeń jest rozkład na tensor naprężenia okólnego (izotropowego) i tensor naprężeń różnicowych.

$$\hat{\sigma}_I = \begin{bmatrix} \sigma_{śr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{śr} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{śr} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_r = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_{śr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_{śr} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_{śr} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{śr} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

Naprężenia różnicowe

$$\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3 = 0$$

$$\Delta\sigma_1 = \sigma_1 - \sigma_{śr} > 0$$

naprężenie ściskające

$$\Delta\sigma_3 = \sigma_3 - \sigma_{śr} < 0$$

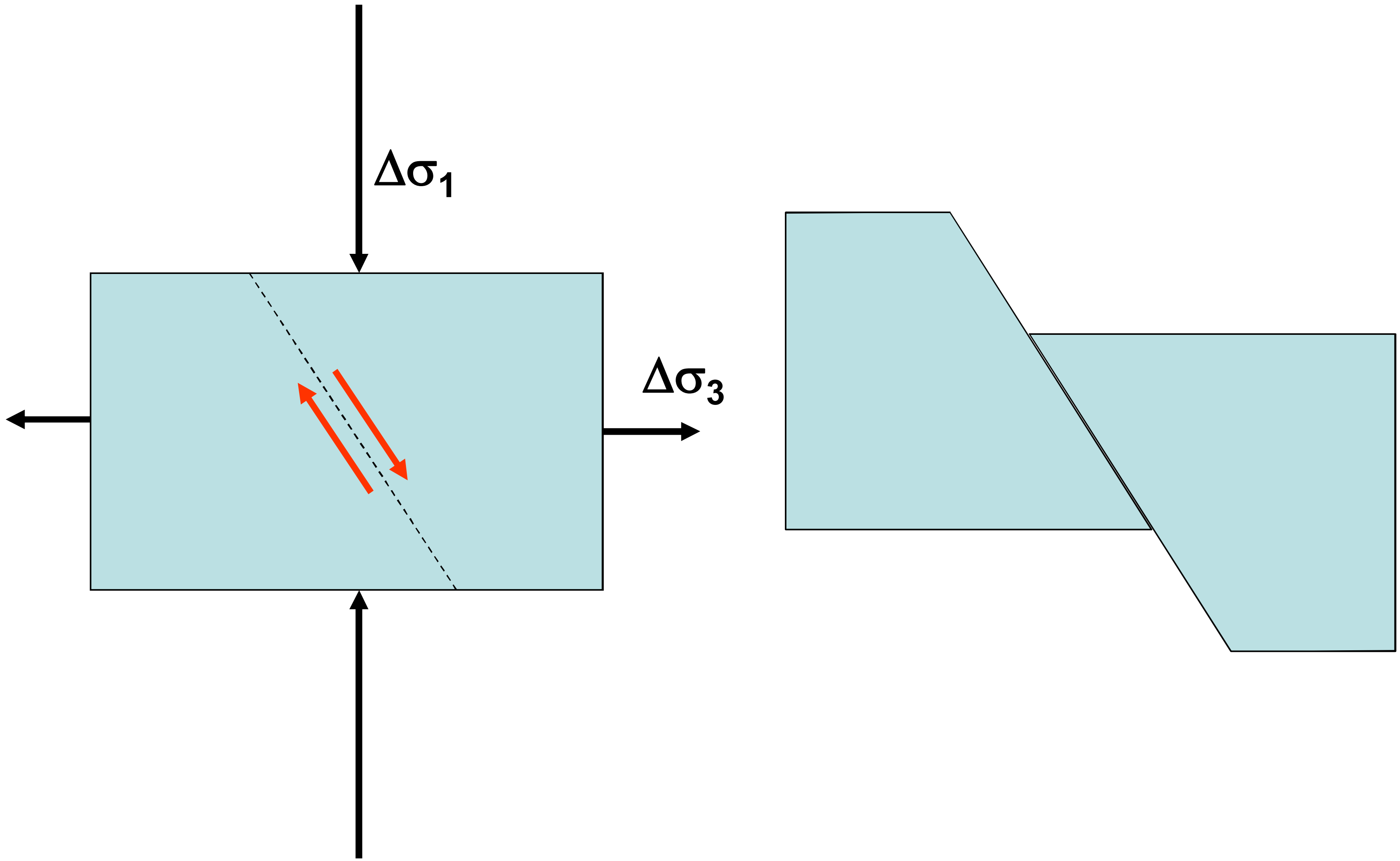
naprężenie rozciągające

$$\Delta\sigma_2 = \sigma_2 - \sigma_{śr} > 0$$

$$\Delta\sigma_2 = \sigma_2 - \sigma_{śr} < 0$$

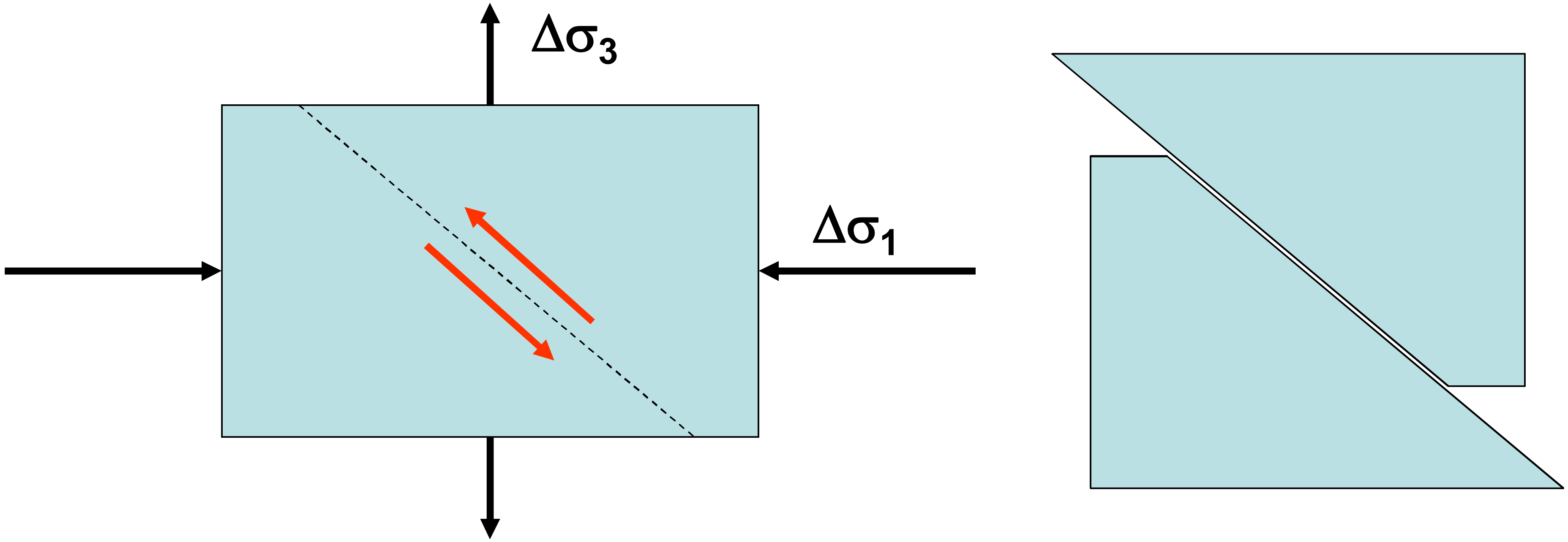
naprężenie ściskające
lub rozciągające

Powstawanie uskoków



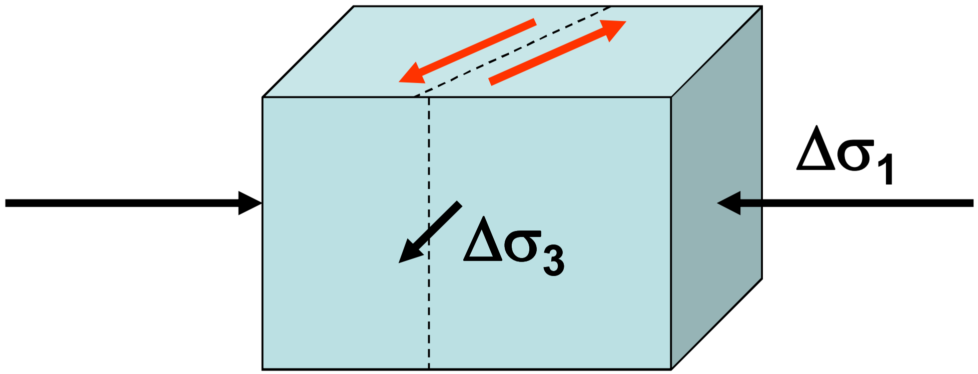
Uskok normalny

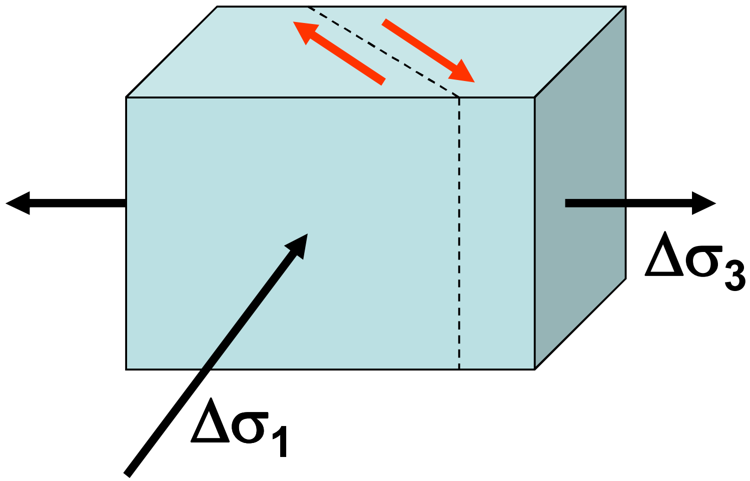
Powstawanie uskoków



Uskok odwrócony

Powstawanie uskoków

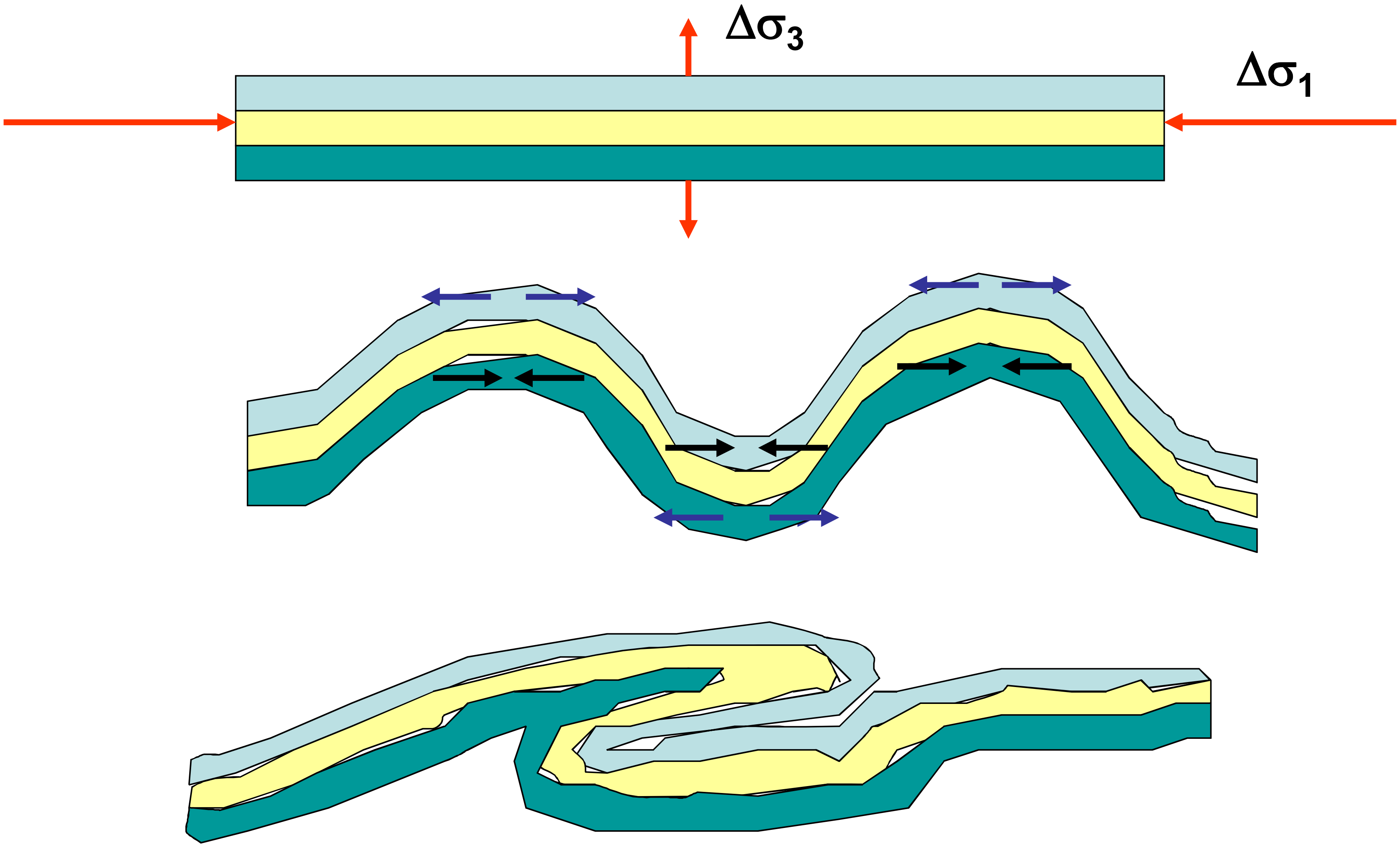




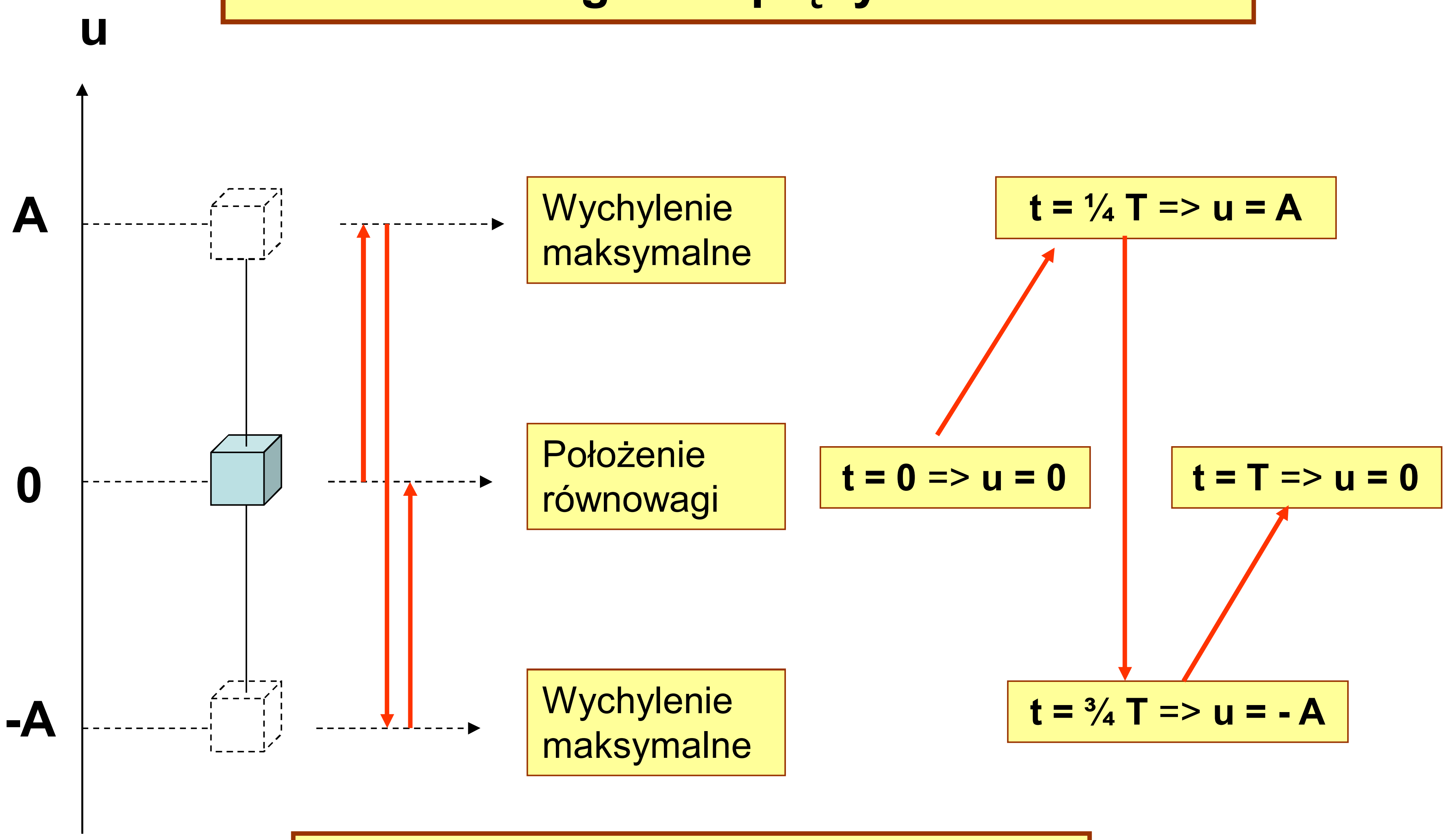
Uskok przesuwczy lewoskrętny

Uskok przesuwczy prawoskrętny

Fałdowania



Drgania sprężyste



Parametry drgań

A – amplituda drgań   T – okres drgań

Parametry drgań

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$ ← częstotliwość drgań

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$$ ← częstość kątowa drgań

$$\boxed{\varphi = \frac{2\pi t}{T} + \varphi_0 = \omega t + \varphi_0}$$ ← faza drgań

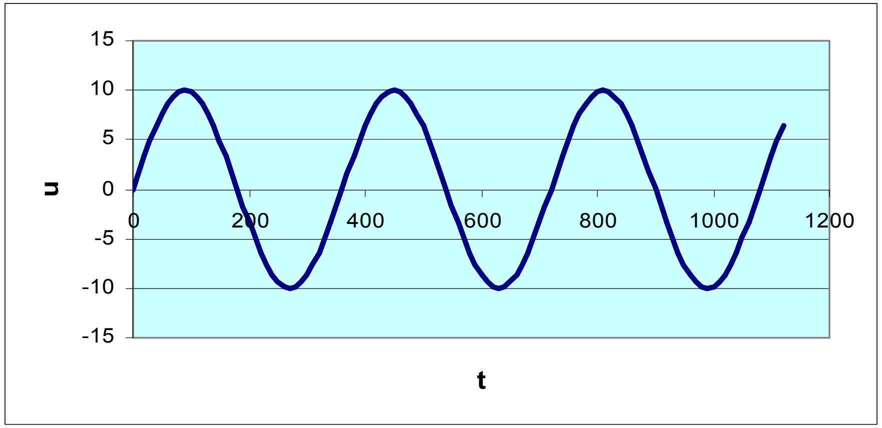
$$\boxed{\varphi_0}$$ ← przesunięcie fazowe

Drgania sprężyste

$$u = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

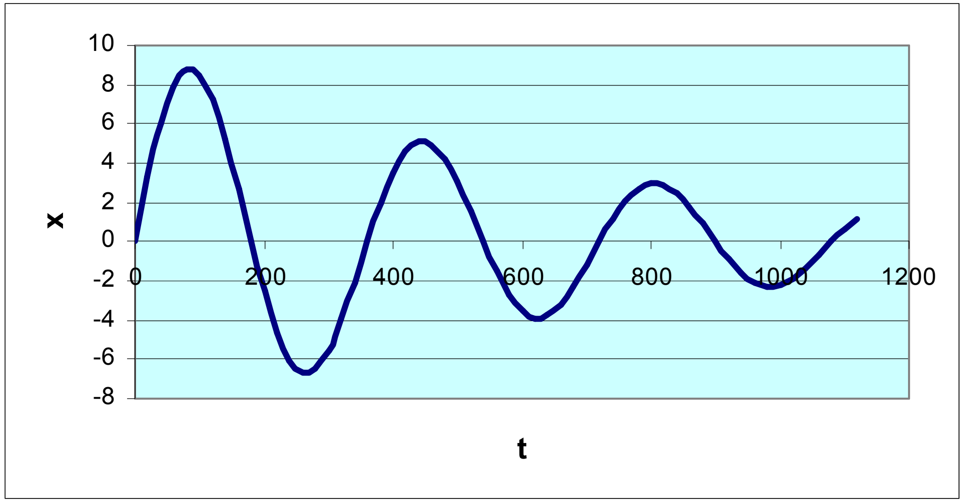
$$v = \frac{du}{dt} = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = \frac{d^2u}{dt^2} = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$



Drgania tłumione

$$x = A \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$



Fale sprężyste

- Przyłożenie naprężeń zewnętrznych w danym fragmencie ośrodka powoduje jego odkształcenie, które z kolei powoduje zmianę stanu naprężenia w sąsiedztwie.
- Zmiana naprężenia w jednym punkcie ośrodka sprężystego powoduje zmianę stanu naprężenia w całym ośrodku.
- Jeśli naprężenia zewnętrzne będą zmienne w czasie wówczas zmiany naprężeń wewnątrz ośrodka będą przemieszczały się w ośrodku z określoną prędkością **v**.

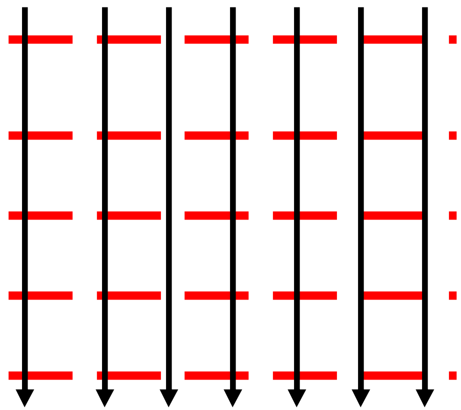
Rozchodzenie się naprężeń w ośrodku nazywamy

falą sprężystą

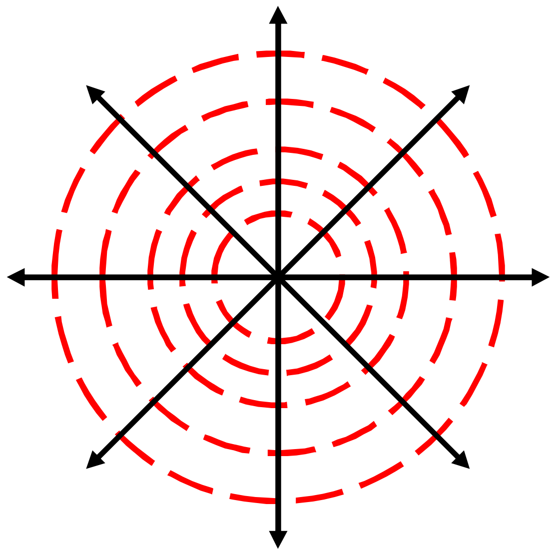
Gdy fala rozchodzi się ze źródła wzbudzenia cząsteczki ośrodka wykonujące **drgania w tej samej fazie** tworzą **powierzchnię fazową**.

Promieniem fali nazywamy linię wychodzącą z punktu wzbudzenia w każdym swym punkcie **prostopadłą do określonej w tym punkcie powierzchni fazowej.**

Fala płaska



Fala kulista



powierzchnia fazowa

promień fali

Prawa rządzące ruchem fal w ośrodku sprężystym

Zasada Huygensa

Każdy punkt ośrodka do którego dotrze fala staje się źródłem fali kulistej. W chwili „t" front fali tworzy obwiednia wszystkich fal generowanych przez punkty ośrodka.

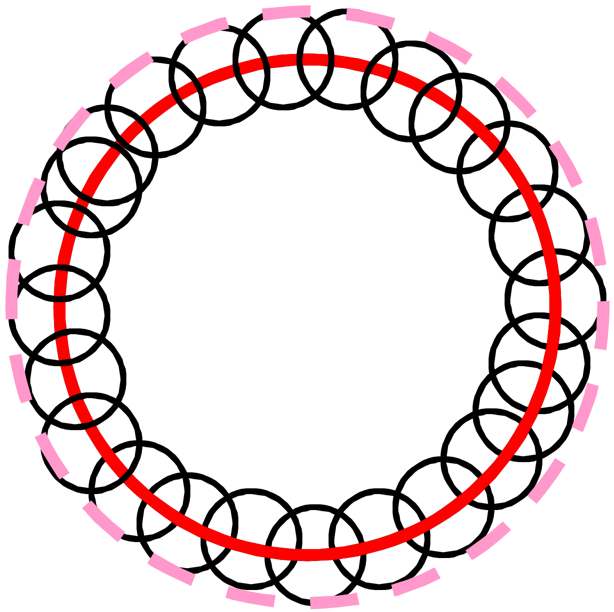
Zasada Fermata

Pomiędzy dwoma punktami ośrodka fala rozchodzi się po takiej drodze by czas propagacji był ekstremalny (najkrótszy lub najdłuższy).

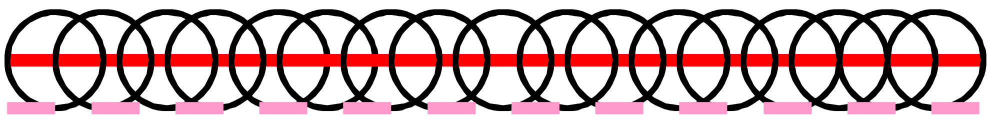
Ilustracja zasady Huygensa

punkty do których dotarła fala

punkty które tworzą nowy front fali



Fala kulista

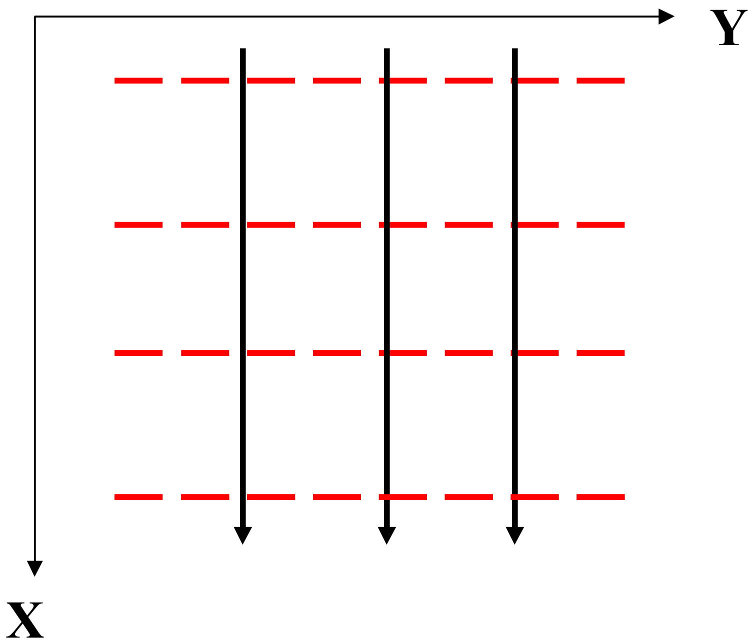


Fala płaska

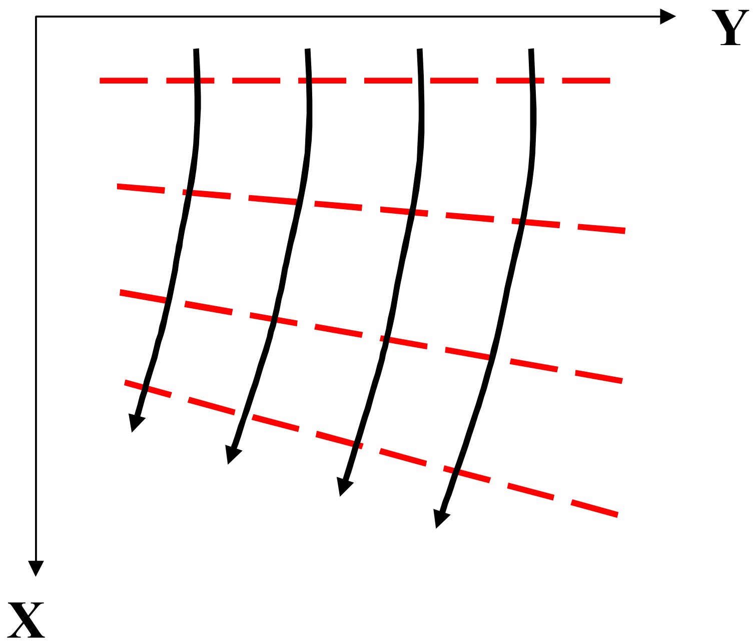
Konsekwencja zasady Fermata:

- w ośrodku w którym prędkość fali jest stała
  promień fali jest linią prostą,
- jeśli prędkość fali zmienia się od punktu do punktu to
  promień fali jest linią krzywą.

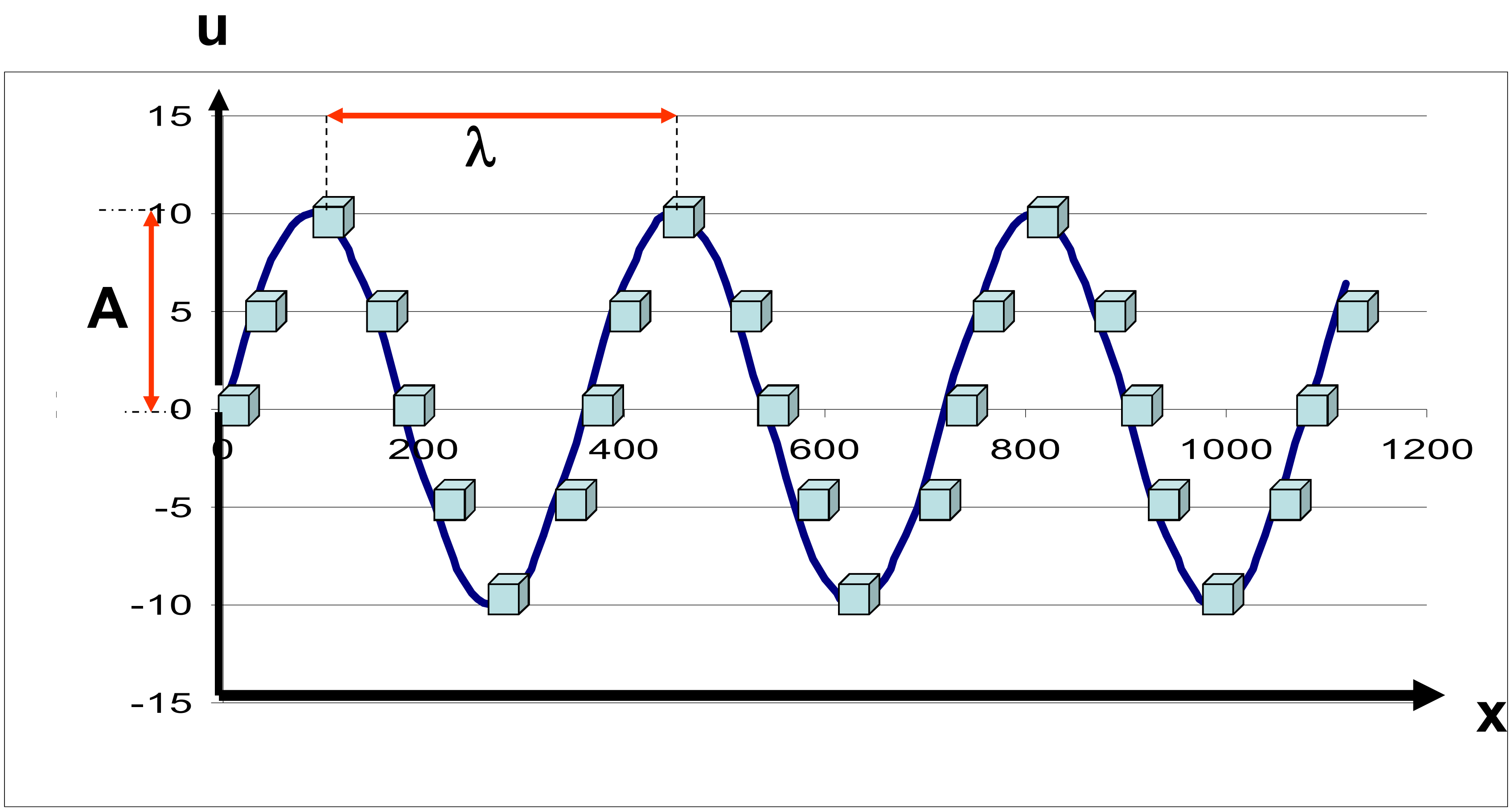
V= const



V= f(x,y)



Fale sprężyste



Parametry fali

A – amplituda drgań   λ – długość fali

Parametry fali

$$\lambda = v \cdot T = \frac{v}{f}$$ ← **Długość fali**

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \frac{f}{v}$$ ← **Liczba falowa**

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$ ← **Częstość kątowa drgań**

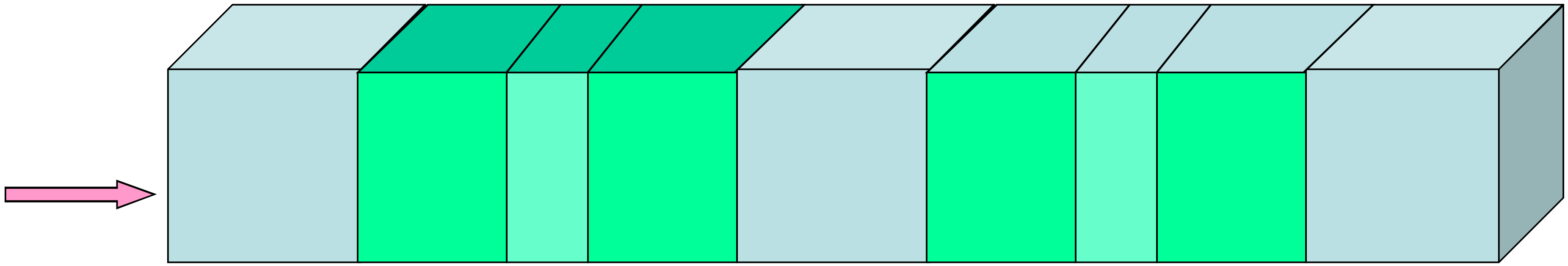
Równanie fali płaskiej

$$u = A \cdot \sin(k x + \omega t) = A \cdot \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T}\right)$$

Fale podłużne P

Gdy przyłożone naprężenia zewnętrzne będą naprężeniami normalnymi wówczas w ośrodku rozchodzić się będą fale, powodujące deformacje o kierunku zgodnym z kierunkiem rozchodzenia się fali. Ich prędkość zależy od modułu ψ i gęstości ośrodka ρ:

$$V_p = \sqrt{\frac{\Psi}{\rho}} = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}}$$

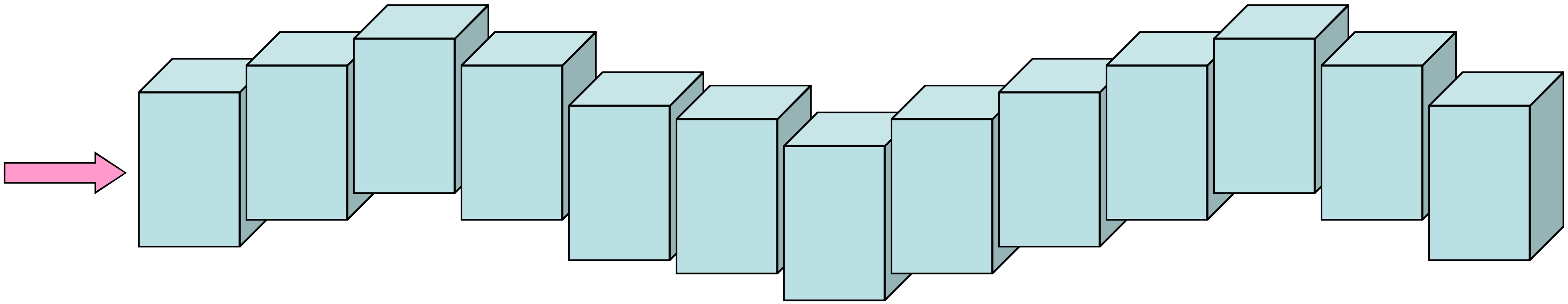


Rozchodząc się powodują one lokalne zwiększenie lub zmniejszenie gęstości ośrodka, nazywamy je zagęszczeniowo-rozrzedzeniowymi lub kompresyjno-dylatacyjnymi.

Fale poprzeczne S

Gdy przyłożone naprężenia zewnętrzne będą naprężeniami stycznymi wówczas w ośrodku rozchodzić się będą fale powodujące deformacje o kierunku prostopadłym do kierunku rozchodzenia się fali. Ich prędkość zależy od modułu sztywności *G* i gęstości ośrodka ρ :

$$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$



Rozchodząc się powodują one lokalne zmiany kształtu fragmentów ośrodka stąd nazywamy je falami odkształceniowymi.

Ośrodek jest nieograniczony

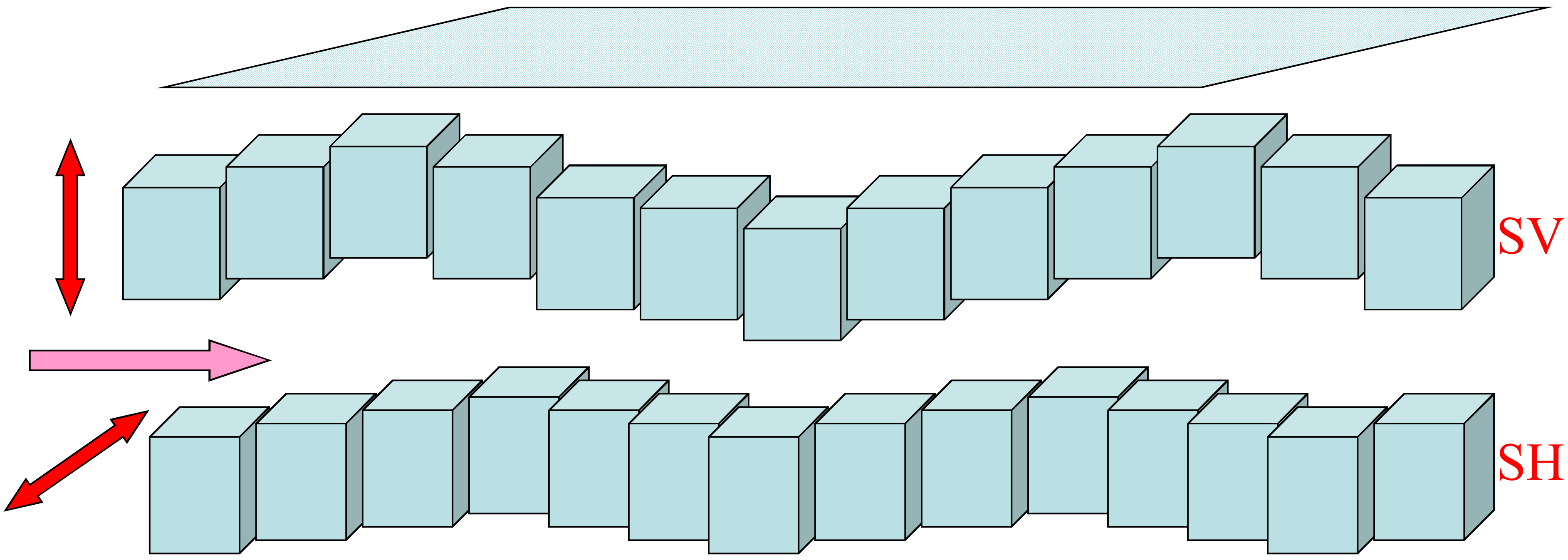
- rozchodzi się fala poprzeczna niespolaryzowana
(w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku rozchodzenia się fali możliwe jest nieskończenie wiele kierunków drgań)

Ośrodek jest półprzestrzenią ograniczoną płaszczyzną

- rozchodzą się dwie spolaryzowane fale poprzeczne:

- **o drganiach równoległych do płaszczyzny granicznej (SH)**
- **o drganiach prostopadłych do płaszczyzny granicznej (SV)**

Prędkość fali SV jest większa od fali SH

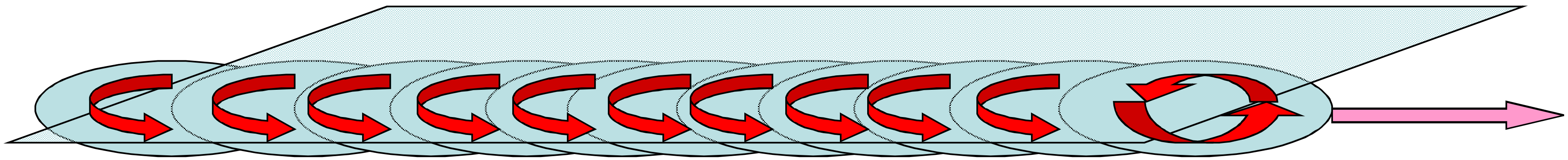


Fale powierzchniowe

W półprzestrzeni rozchodzą się fale charakteryzujące się złożonym ruchem drgającym elementów ośrodka, których amplituda maleje eksponencjalnie z odległością od płaszczyzny granicznej – fale powierzchniowe.

Fala Reyleigh'a (R)

cząsteczki ośrodka poruszają się po elipsach prostopadłych do powierzchni granicznej a równoległych do kierunku propagacji fali



Prędkość fali R jest o ok. 10% mniejsza od prędkości fali S

Fala Love'a (L)

♣ Pojawia się przy granicy dwóch ośrodków, różniących się wartościami prędkości fali S.

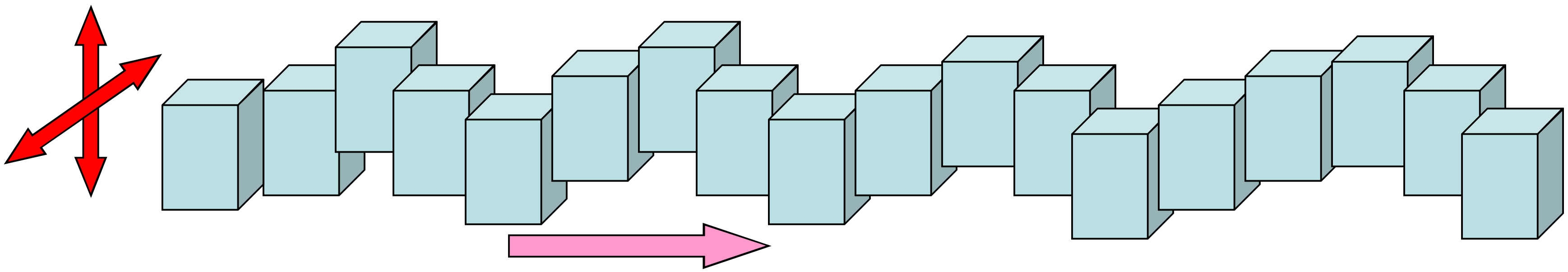
♣ Rozchodzi się w ośrodku o mniejszej prędkości.

♣ Jej prędkość jest pośrednia pomiędzy prędkościami fal S w obu ośrodkach.

♣ W czasie propagacji fali drgania cząsteczek ośrodka są złożeniem dwóch prostopadłych ruchów drgających

- równoległego do powierzchni granicznej,
- prostopadłego do powierzchni granicznej.

♣ Oba drgania zachodzą w kierunku poprzecznym do kierunku fali.



Prędkości fal sejsmicznych w ośrodkach skalnych

Prędkości fal podłużnych są zawsze większe od prędkości fal poprzecznych. Stosunek V_P / V_S zależy od współczynnika Poissona:

$$\frac{V_p}{V_s} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)}}$$

Średnia wartość ν dla skonsolidowanych skał wynosi ¼ stąd średnio:

$$\frac{V_p}{V_s} = \sqrt{3}$$

Stosunek V_P/V_S maleje ze stopniem konsolidacji skały, przykładowo:

- **dla gleb i nieskonsolidowanych skał – $V_S = 0{,}4\ V_P$**
- **dla skał osadowych zdiagenezowanych – $V_S = 0{,}5\ V_P$**
- **dla skał krystalicznych – $V_S = 0{,}6\ V_P$**

Prawa odbicia i załamania fali

Prawa te ogólnie określa się mianem *praw Snelliusa*

Na granicy dwóch ośrodków różniących się własnościami sprężystymi fala dochodząca do granicy może ulec częściowo odbiciu a częściowo przejść przez granicę i propagować w drugim ośrodku.

Jeśli do granicy dotrze fala P lub S, na granicy tej zawsze generowane są oba typy fal tzn. zarówno fale podłużne jak i poprzeczne.

Sinus kąta pod jakim fala wychodzi z granicy zależy od sinusa kąta pod jakim fala pada na granicę i stosunku prędkości fali padającej i wychodzącej z granicy

$$\frac{\sin\Theta}{V_p} = \frac{\sin\Theta'}{V_p'}$$

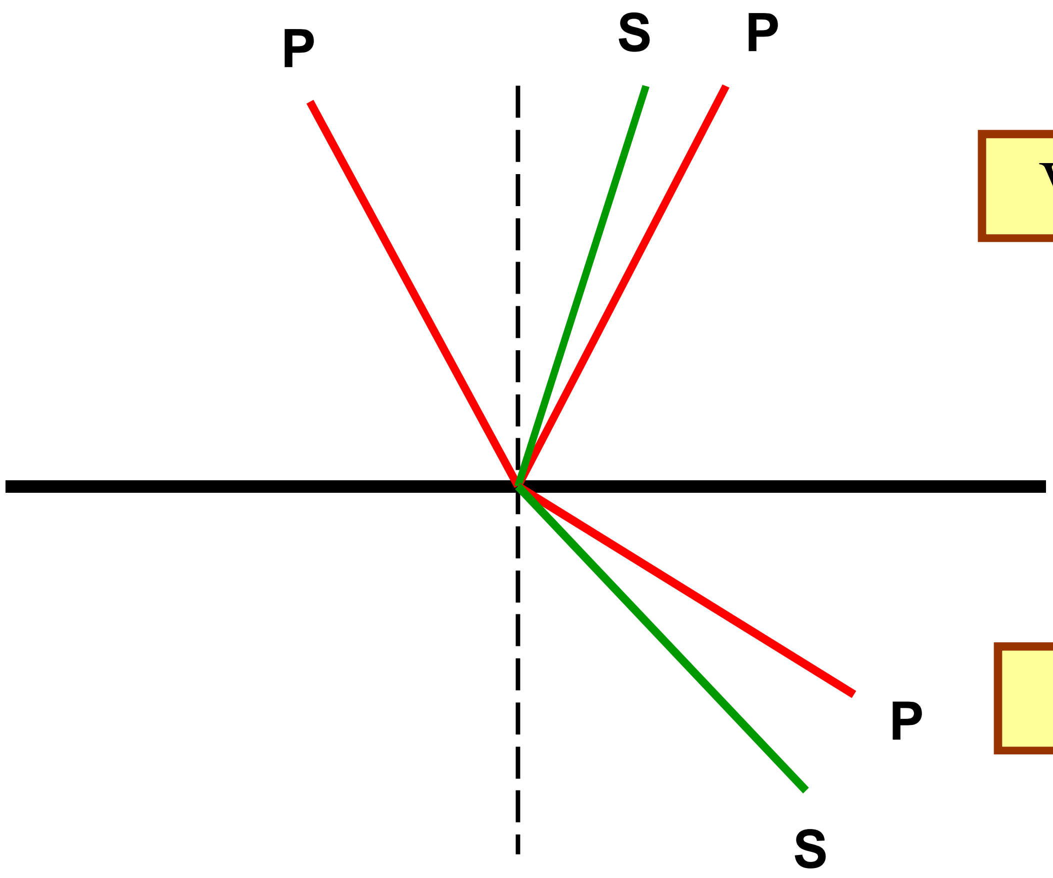
Θ - kąt padania   V – prędkość fali padającej

Θ' - kąt wyjścia   V' – prędkość fali wychodzącej

(kąty mierzone od normalnej do granicy)

Fala padająca na granicę pod kątem $\alpha \neq 0^o$

$V_1 < V_2$



V_{1P}, V_{1S}

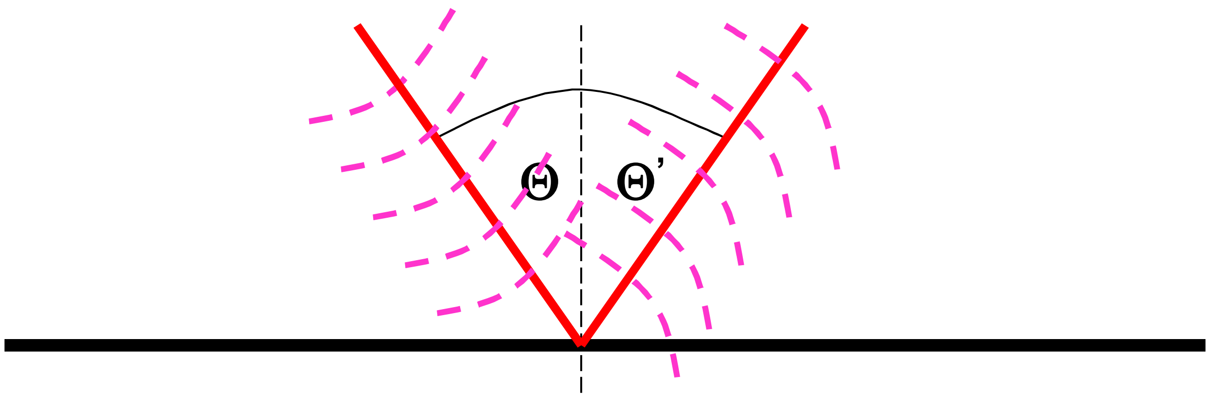
V_{2P}, V_{2S}

Fala odbita od granicy

1. fala padająca i fala odbita są tego samego typu (V = V')

$$\frac{\sin\Theta}{V_P} = \frac{\sin\Theta'}{V_P} \qquad \frac{\sin\Theta}{V_S} = \frac{\sin\Theta'}{V_S}$$

Θ = Θ' tzn. kąt padania równa się kątowi odbicia



Fala odbita od granicy

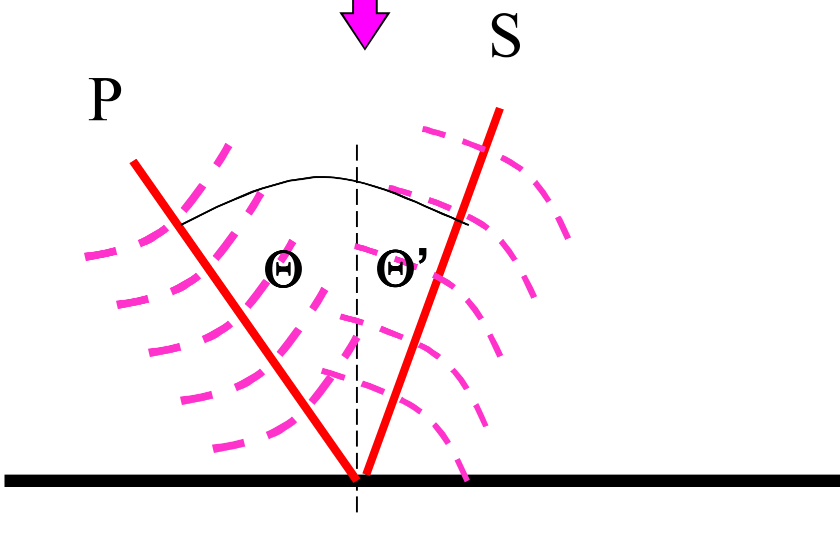
2. fala padająca i fala odbita są różnego typu ($V \neq V'$)

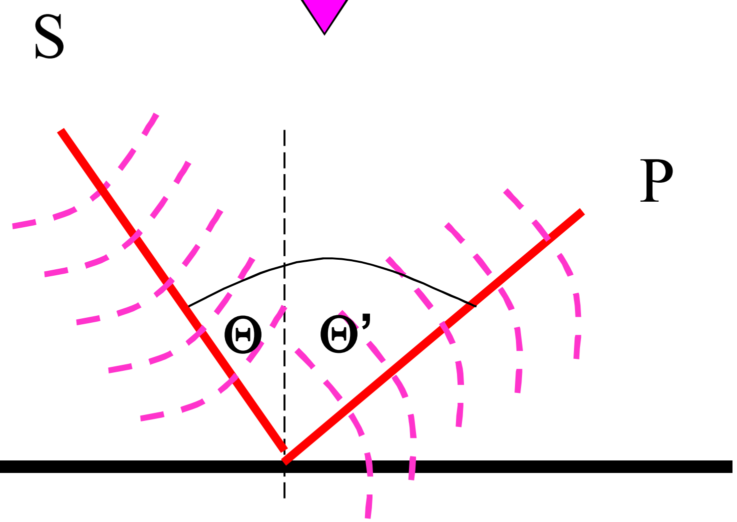
$$\frac{\sin\Theta}{V_P} = \frac{\sin\Theta'}{V_S}$$

$$\frac{\sin\Theta}{V_S} = \frac{\sin\Theta'}{V_P}$$

$V_S < V_P \Rightarrow \Theta' < \Theta$

$V_P > V_S \Rightarrow \Theta' > \Theta$





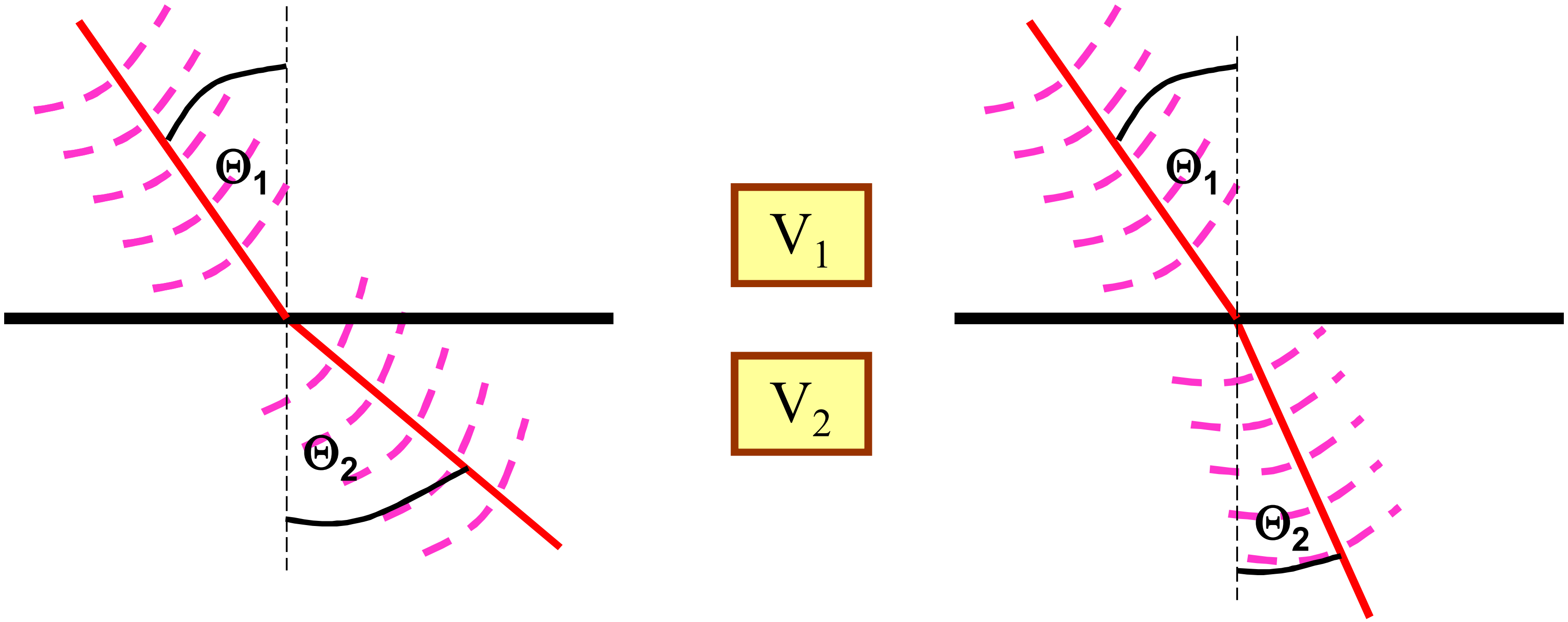
Fala załamana na granicy

Fala przechodzi przez granicę pomiędzy ośrodkami różniącymi się prędkościami fal sprężystych

$$\frac{\sin\Theta_1}{V_1} = \frac{\sin\Theta_2}{V_2}$$

$V_1 < V_2 \Rightarrow \Theta_1 < \Theta_2$
fala odchyla się w stronę granicy ośrodka

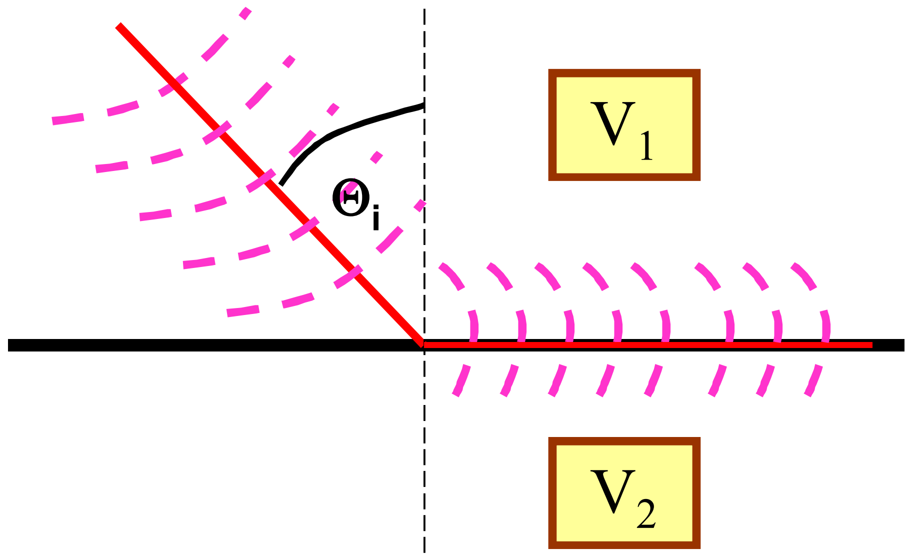
$V_1 > V_2 \Rightarrow \Theta_1 > \Theta_2$
fala odchyla się od granicy ośrodka



Fala załamana na granicy ugięcie krytyczne

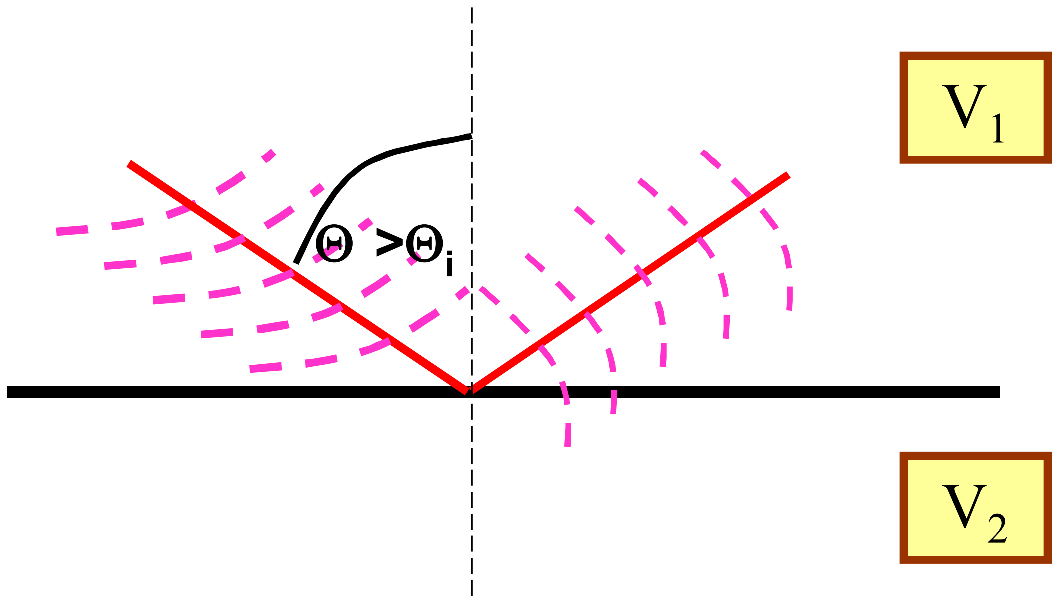
W przypadku przechodzenia fali z ośrodka o mniejszej prędkości do ośrodka o większej prędkości istnieje taki kąt Θ_1 zwany kątem krytycznym (Θ_i) przy którym kąt $\Theta' = 90^0$ (tzn. fala propaguje wzdłuż granicy ośrodków)

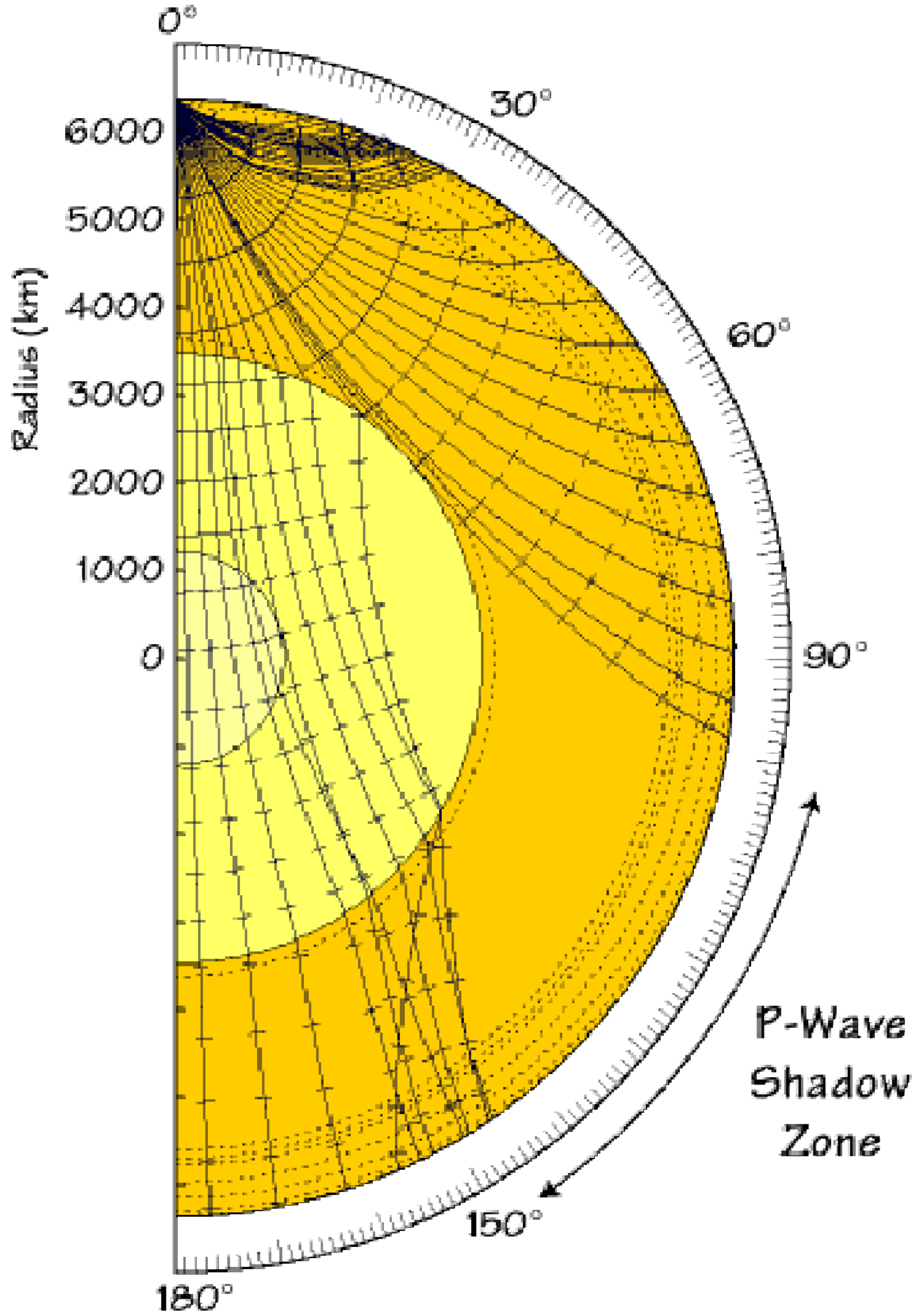
$$\frac{\sin\Theta_i}{V_1} = \frac{\sin 90^0}{V_2} \Rightarrow \sin\Theta_i = \frac{V_1}{V_2}$$

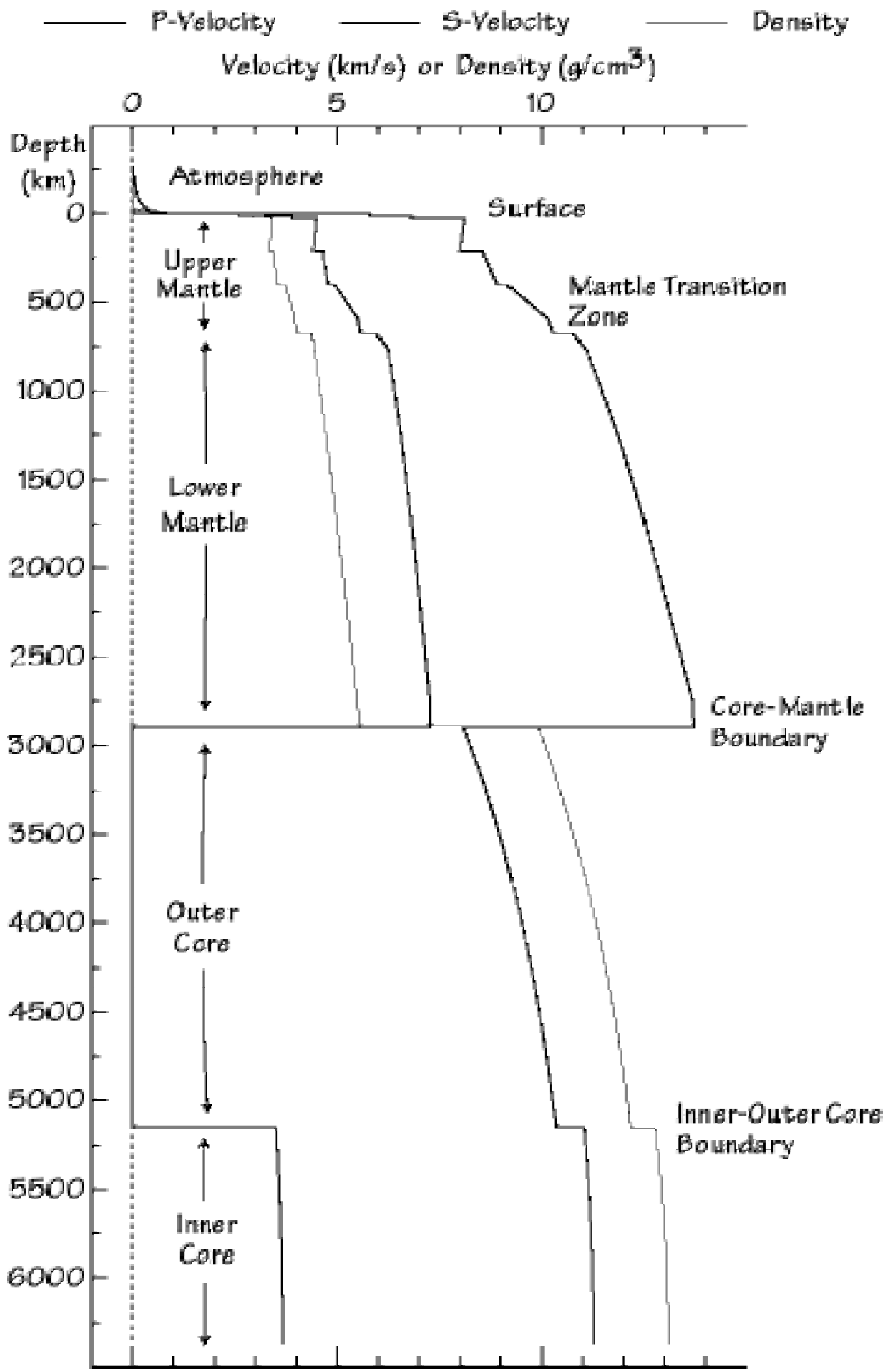


Całkowite wewnętrzne odbicie fali

Jeśli kąt padania Θ jest większy od Θ_i wówczas następuje tzw. całkowite wewnętrzne odbicie i fala nie przechodzi przez granicę dwóch ośrodków. Kąt padania równy jestkątowi odbicia.




0°
30°
60°
90°
150°
180°
Radius (km)
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
P-Wave
Shadow
Zone


P-Velocity
S-Velocity
Density
Velocity (km/s) or Density (g/cm3)
0
5
10
Depth (km)
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
4500
5000
5500
6000
Atmosphere
Surface
Upper Mantle
Mantle Transition Zone
Lower Mantle
Core-Mantle Boundary
Outer Core
Inner-Outer Core Boundary
Inner Core