

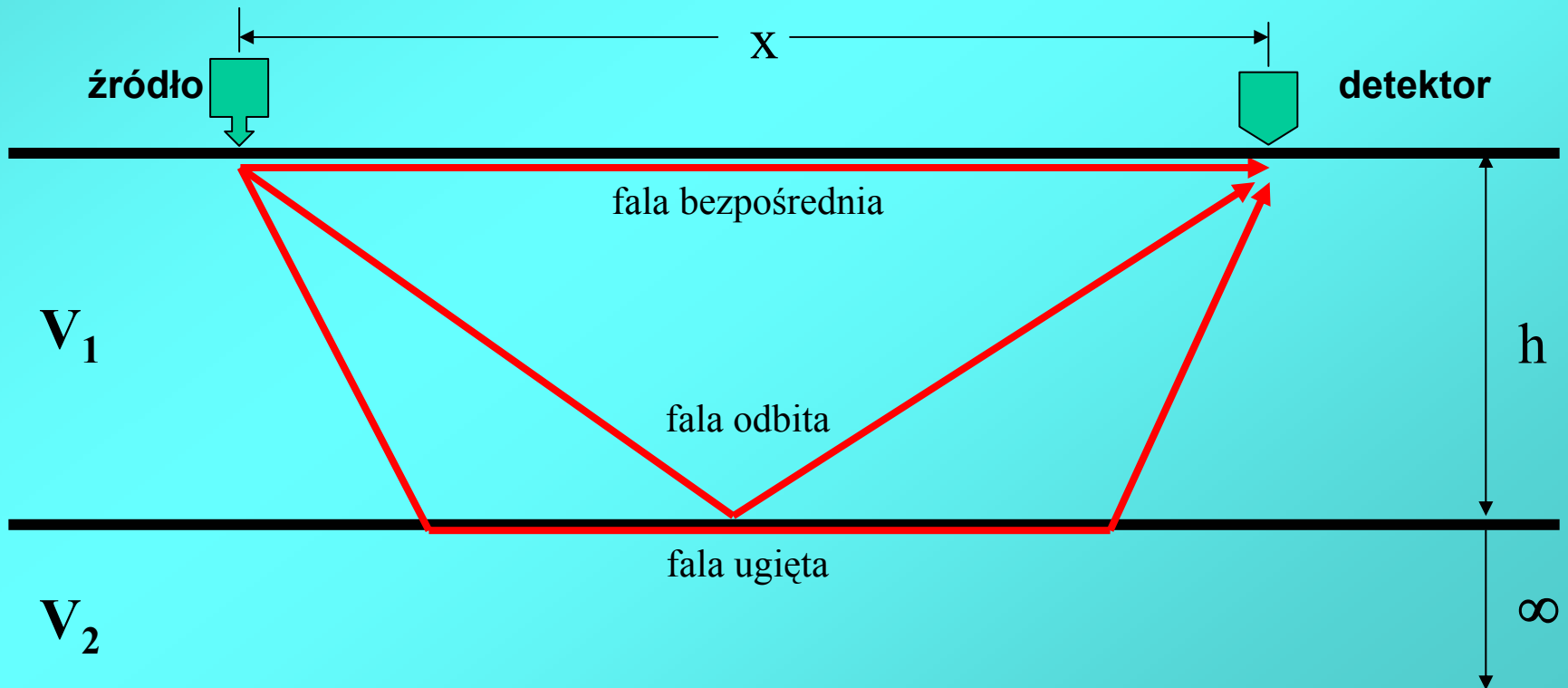
GEOFIZYKA STOSOWANA – wykład 4

Rozchodzenie się fal sejsmicznych w ośrodku dwuwarstwowym.

Dwie warstwy

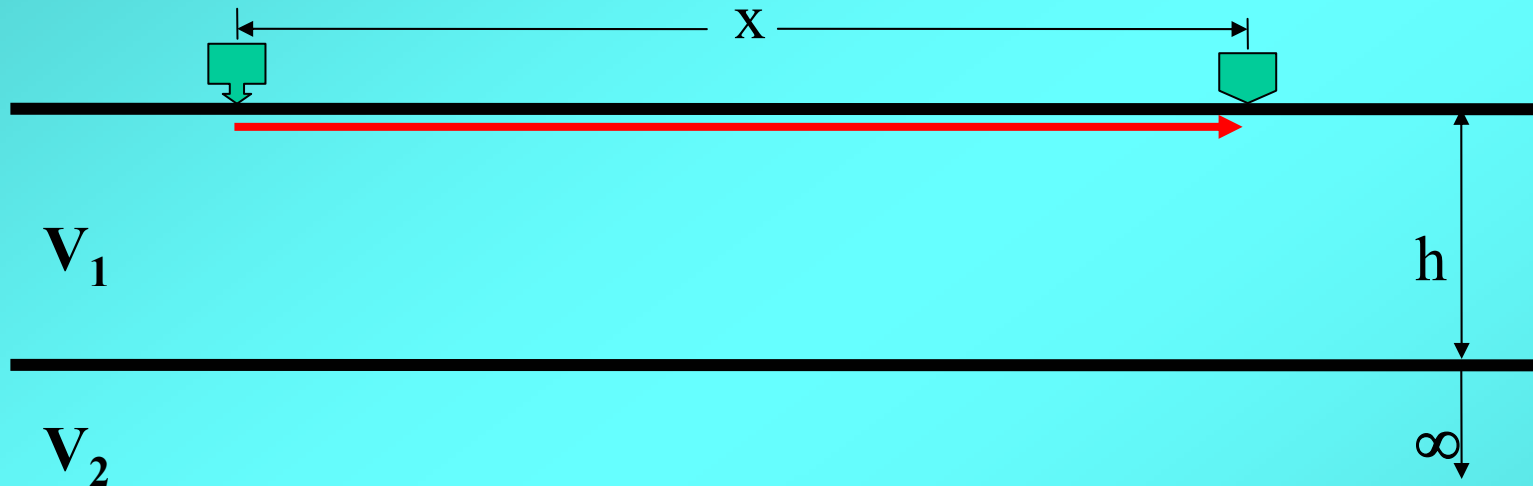
- górna: prędkość fali V_1 , miąższość h
- dolna: prędkość fali V_2 , miąższość nieskończona

Źródło wzbudzenia i detektor drgań umieszczone są na górnej powierzchni pierwszej warstwy w odległości x od siebie.



fala bezpośrednia (DIR)

Propaguje po najkrótszej drodze - odcinku linii prostej łączącej źródło z detektorem



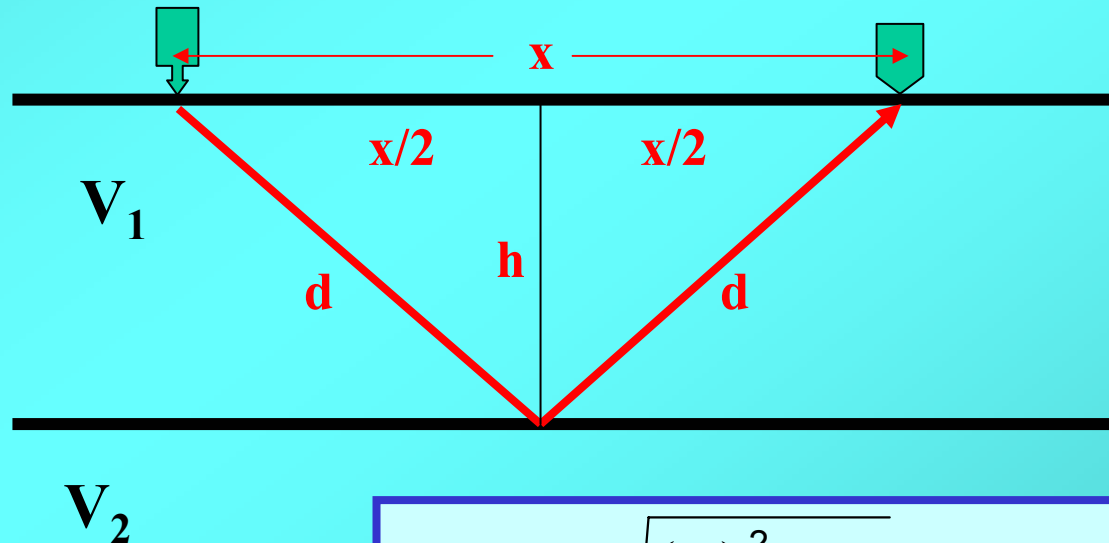
Czas po jakim fala wzbudzona w chwili $t = 0$ dotrze do detektora jest równy:

$$t_{DIR} = \frac{x}{V_1}$$

fala odbita (RFL)

Fala odbita od granicy drugiej warstwy (fala refleksyjna) – przechodzi przez warstwę pierwszą do granicy, po odbiciu ponownie przechodzi przez górną warstwę docierając do detektora:

- kąt padania równa się kątowi odbicia,
- drogi do i od granicy odbijającej są sobie równe,
- punkt odbicia leży pod punktem środkowym odcinka X.



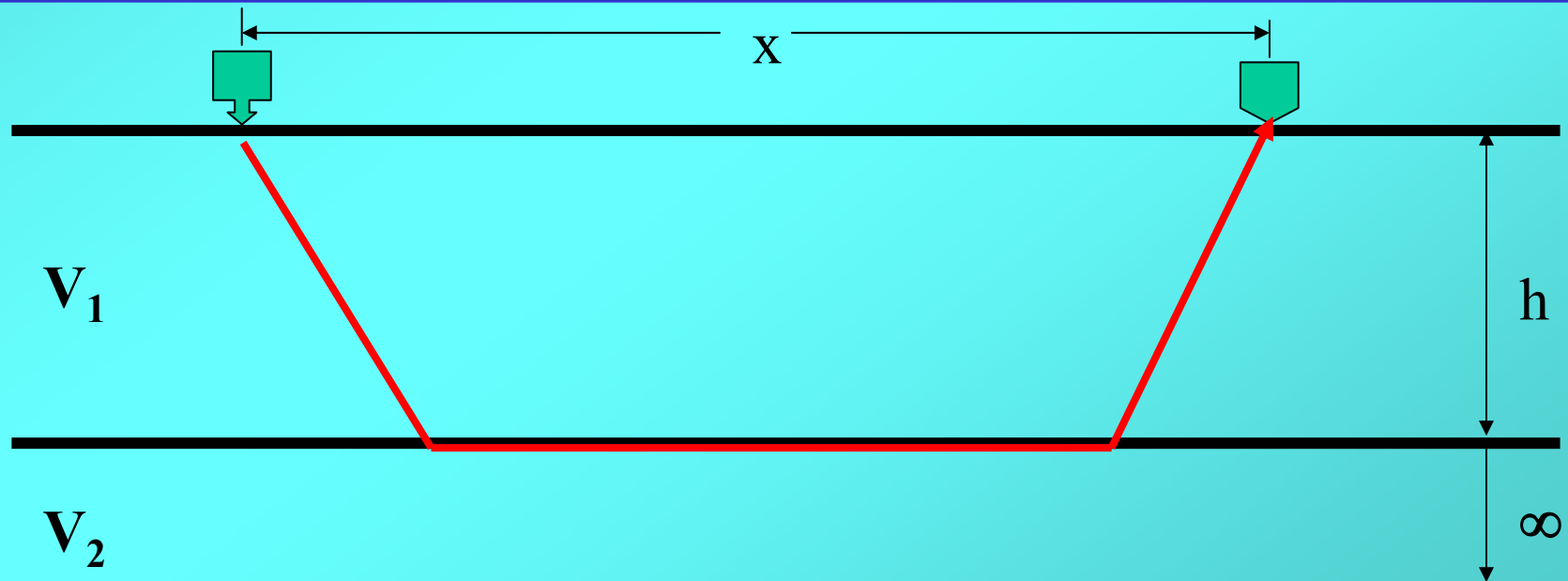
Czas propagacji jest równy:

$$t_{RFL} = \frac{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2}}{V_1} = \frac{(x^2 + 4h^2)^{1/2}}{V_1}$$

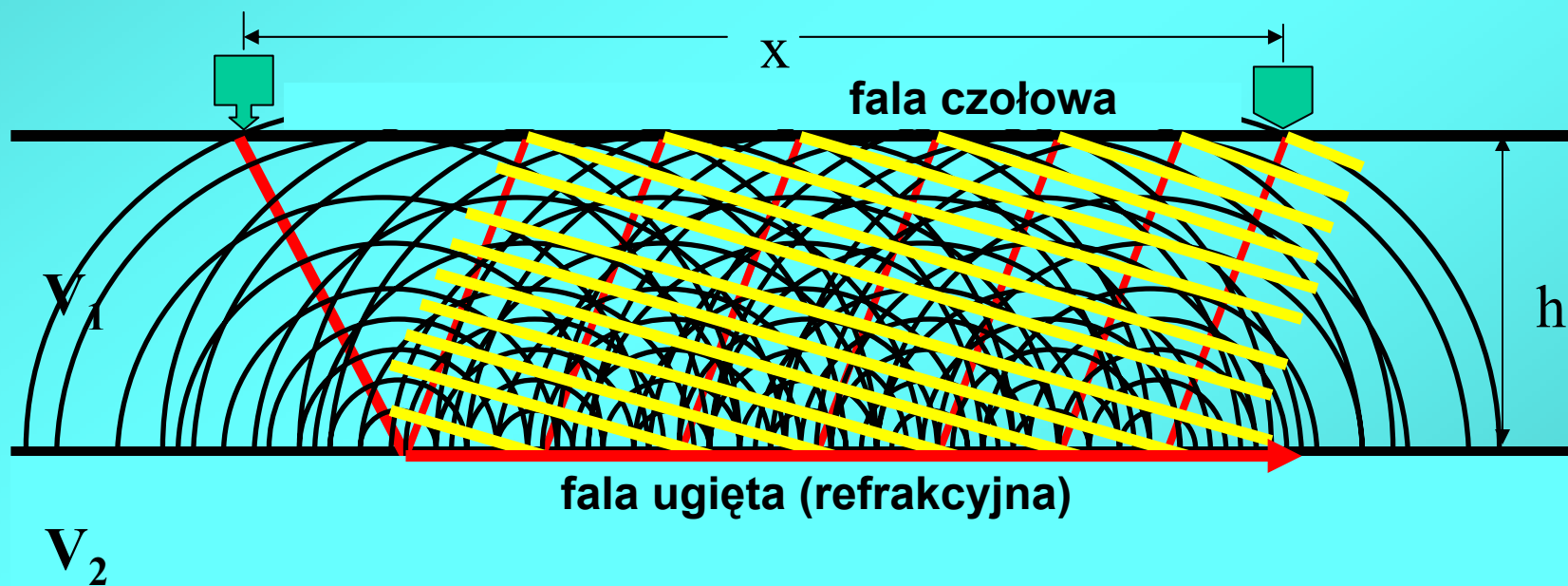
fala ugięta (RFR)

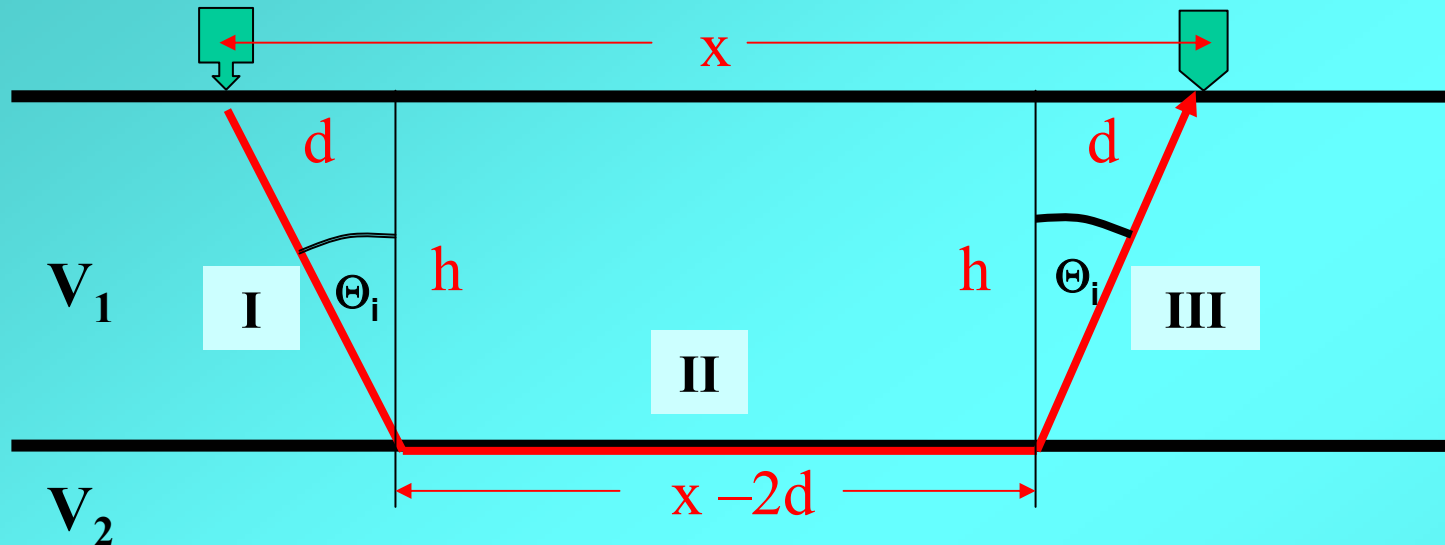
Fala ugięta na granicy ośrodka drugiego (fala refrakcyjna):

- przechodzi przez warstwę pierwszą padając na granicę warstwy drugiej **pod kątem krytycznym Θ_i** ,
- **ulega załamaniu o 90°** i porusza się po granicy warstwy drugiej z **prędkością V_2** ,
- do detektora dociera fala która powstaje na granicy ośrodków w takim punkcie aby jej **promień tworzył z normalną do płaszczyzny kąt Θ_i** .



Powstawanie fali czołowej na granicy refrakcyjnej





Droga fali składa się z trzech odcinków:

odcinka I - o długości $\frac{h}{\cos \Theta_i}$ przebywanego z prędkością V_1

odcinka II - o długości $x - \frac{2h \sin \Theta_i}{\cos \Theta_i}$ przebywanego z prędkością V_2

odcinka III - o długości $\frac{h}{\cos \Theta_i}$ przebywanego z prędkością V_1 .

Pamiętając, że $\sin \Theta_i = V_1 / V_2$ możemy wyrazić $\cos \Theta_i$ poprzez prędkości fal V_1 i V_2 :

$$\cos \Theta_i = \sqrt{1 - \sin^2 \Theta_i} = \sqrt{1 - \frac{V_1^2}{V_2^2}} = \sqrt{\frac{V_2^2 - V_1^2}{V_2^2}} = \frac{\sqrt{V_2^2 - V_1^2}}{V_2}$$

czas przejścia fali od źródła do detektora:

$$t_{RFR} = 2 \cdot \frac{1}{V_1} \frac{h}{\cos \Theta_i} + \frac{1}{V_2} \left(x - \frac{2 \cdot h \sin \Theta_i}{\cos \Theta_i} \right)$$

po uwzględnieniu wartości $\cos \Theta_i$

$$t_{RFR} = \frac{x}{V_2} + \frac{2h(V_2^2 - V_1^2)^{1/2}}{V_1 \cdot V_2}$$

co można zapisać jako

$$t_{RFR} = \frac{x}{V_2} + t_0$$

Funkcję opisującą zależność czasu dojścia fali do detektora od jego odległości od źródła nazywamy ***hodografem fali***.

Hodograf fali bezpośredniej jest linią prostą o nachyleniu $1/V_1$ przechodzącą przez początek układu :

$$t_{DIR} = \frac{x}{V_1}$$

Hodograf fali odbitej jest hiperbolą mającą wierzchołek przy odległości $x=0$ dla której czas propagacji $t(0) = 2h / V_1$

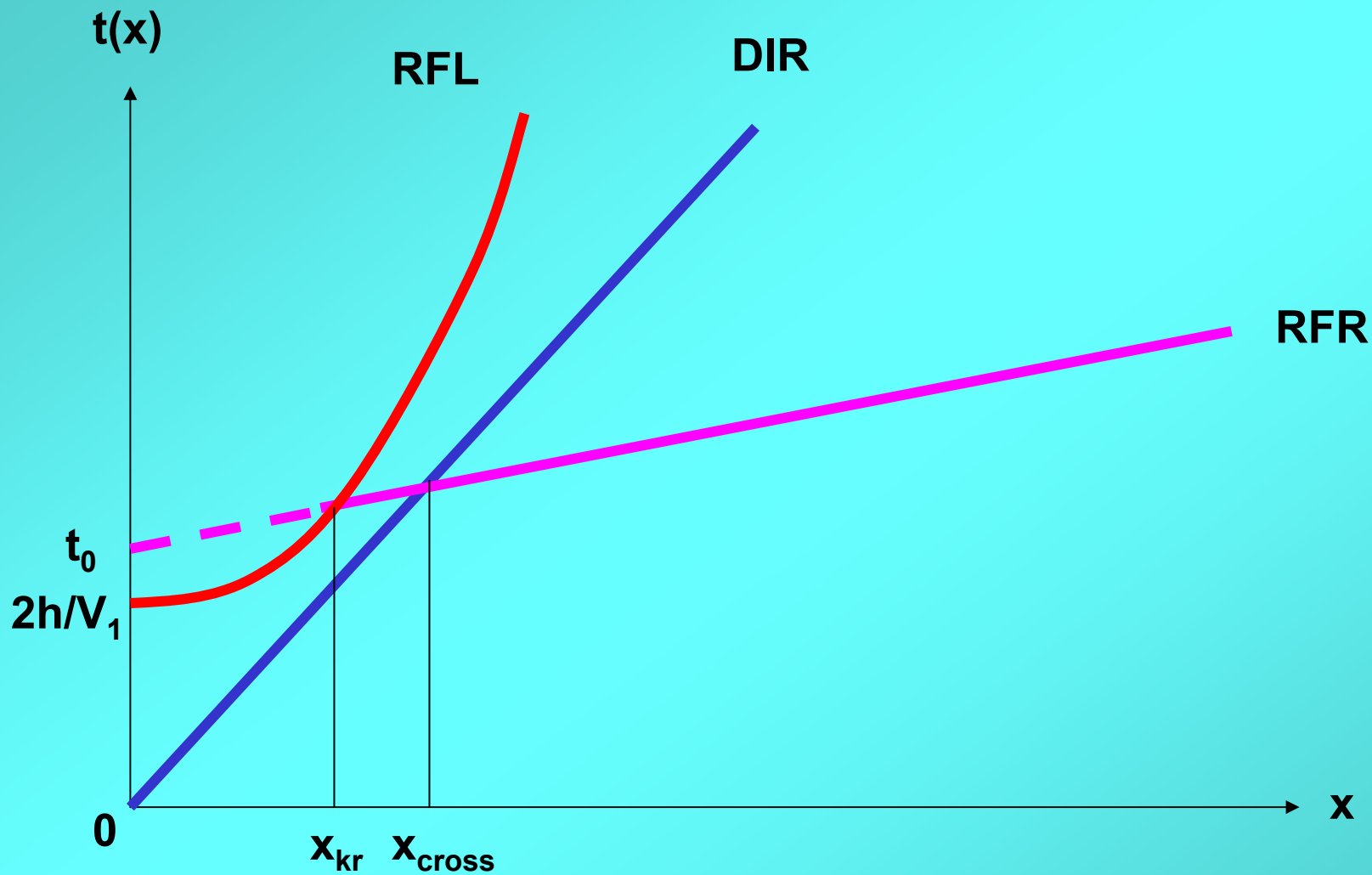
$$t_{RFL} = \frac{(x^2 + 4h^2)^{1/2}}{V_1}$$

Hodograf fali ugiętej jest linią prostą o nachyleniu $1/V_2$ przecinającą oś czasu w punkcie t_0

$$t_{RFR} = \frac{x}{V_2} + t_0$$

gdzie

$$t_0 = \frac{2h(V_2^2 - V_1^2)^{1/2}}{V_1 \cdot V_2} = 2h \sqrt{\frac{1}{V_1^2} - \frac{1}{V_2^2}}$$



Powstanie fali ugiętej zachodzi dopiero gdy kąt padania jest równy kątowi krytycznemu więc funkcja $t_{RFR}(x)$ określona jest dla $x \geq x_{kr}$.

$$x_{KR} = \frac{2hV_1}{\sqrt{V_2^2 - V_1^2}}$$

Odcinek dla którego $0 \leq x \leq x_{KR}$ - **strefa cienia** dla fali refrakcyjnej

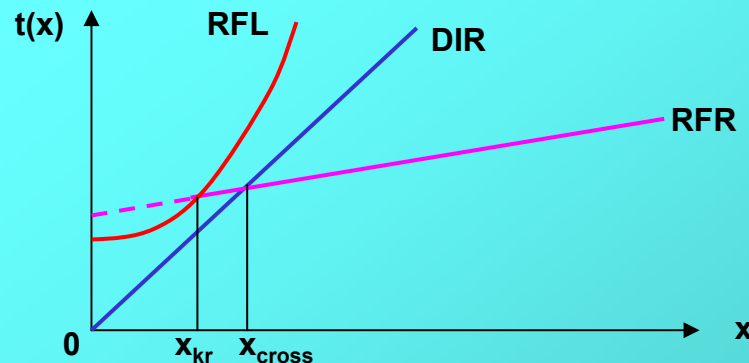
Hodografy fali bezpośredniej i ugiętej przecinają się dla $x = x_{cross}$.
Aby obliczyć x_{cross} przyrównujemy czasy dojścia obu fal.

$$\frac{x_{cross}}{V_1} = \frac{x_{cross}}{V_2} + t_0$$

$$x_{cross} = \frac{t_0}{\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)} = 2h \frac{\sqrt{\frac{1}{V_1^2} - \frac{1}{V_2^2}}}{\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}} = 2h \cdot \sqrt{\frac{V_2 + V_1}{V_2 - V_1}}$$

Porównując hodograpy tych trzech fal stwierdzimy że:

- dla $x < x_{\text{CROSS}}$ najkrótszy czas propagacji ma **fala bezpośrednia** i ona rejestrowana jest jako pierwsza.
- dla $x = x_{\text{CROSS}}$ fala bezpośrednia i fala refrakcyjna mają **identyczny czas propagacji**
- dla $x > x_{\text{CROSS}}$ jako pierwsza do detektora dociera fala refrakcyjna
- fala refleksyjna zawsze dociera do detektora **dopiero po tych dwóch falach**, za wyjątkiem punktu $x = x_{\text{kryt}}$, do którego fala odbita i ugięta propagują po tej samej drodze i z taką samą prędkością.



SEJSMIKA REFRAKCYJNA

Sejsmika refrakcyjna to metoda określania budowy ośrodka na podstawie pomiarów czasu propagacji fal ugiętych na powierzchniach granicznych warstw budujących dany ośrodek.

Warunkiem obserwowania fal ugiętych jest **wzrost prędkości fal sejsmicznych z głębokością**, gdyż tylko wtedy może zachodzić zgodnie z prawem Snelliusa ugięcie o kąt 90° na granicy warstw różniących się prędkością fal.

A. Ośrodek z jedną granicą uginającą zalegającą poziomo.

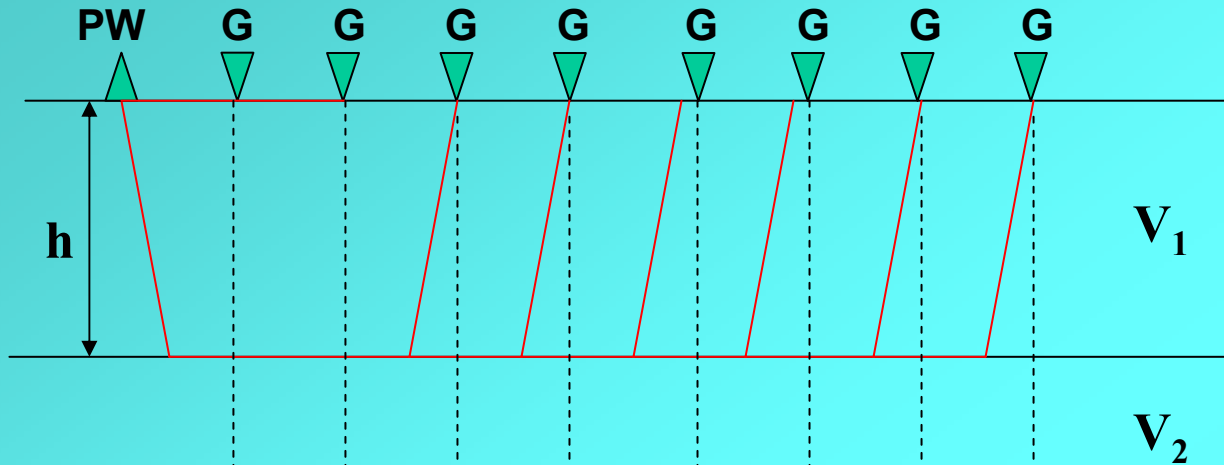
Czas przejścia fali ugiętej ze źródła do odbiornika odległego o „x”:

$$t = \frac{x}{V_2} + \frac{2h(V_2^2 - V_1^2)^{1/2}}{V_1 \cdot V_2} = \frac{x}{V_2} + \frac{2h \cos i}{V_1} = \frac{x \sin \Theta}{V_1} + \frac{2h \cos \Theta}{V_1} \quad \Theta = i$$

Punkt przecięcia przedłużenia linii hodografu fali refrakcyjnej z osią czasu dla $x = 0$ oblicza się ze wzoru:

$$t_0 = \frac{2h(V_2^2 - V_1^2)^{1/2}}{V_1 \cdot V_2}$$

Wyznaczając hodograf fali refrakcyjnej w wyniku pomiarów możemy wykorzystać go do wyliczenia głębokości zalegania granicy refrakcyjnej oraz prędkości fali w warstwie granicznej.

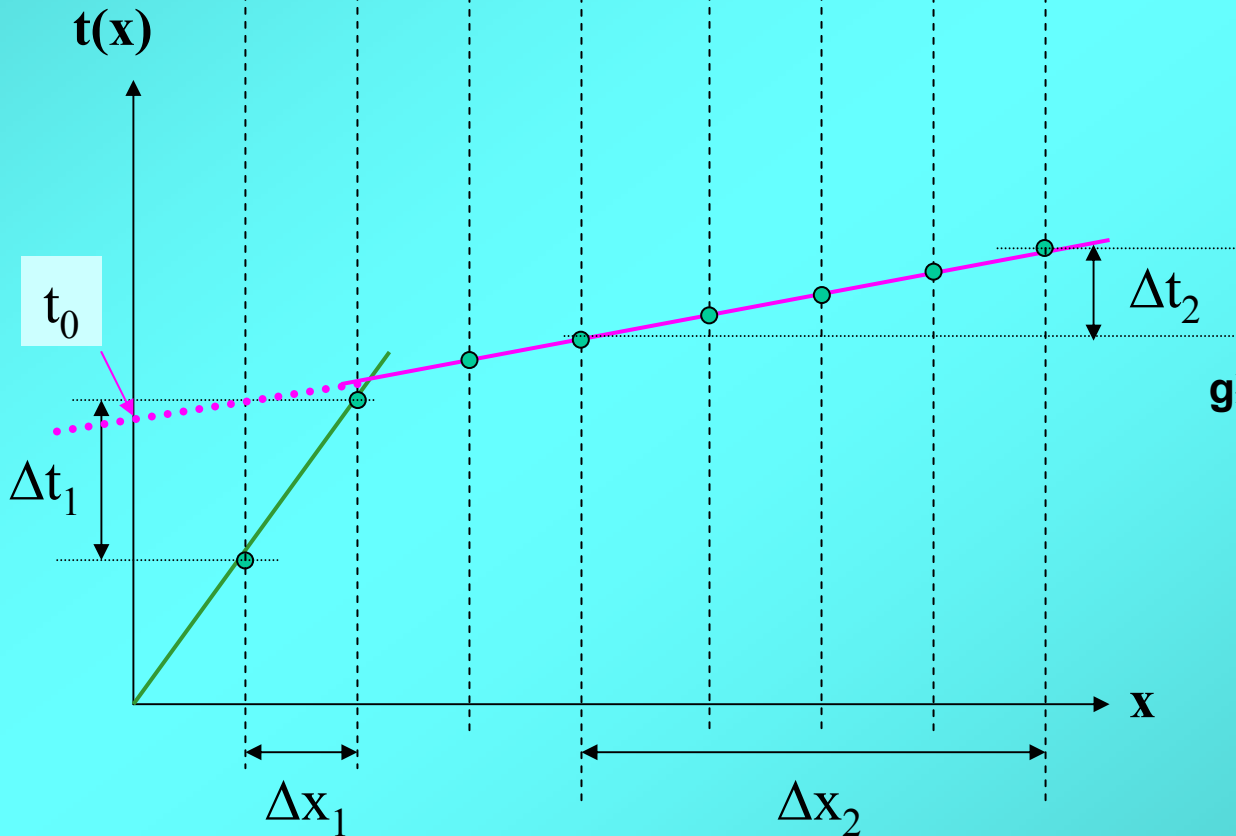


Prędkość fali w warstwie
przypowierzchniowej:

$$V_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}$$

Prędkość fali w warstwie
drugiej (graniczna):

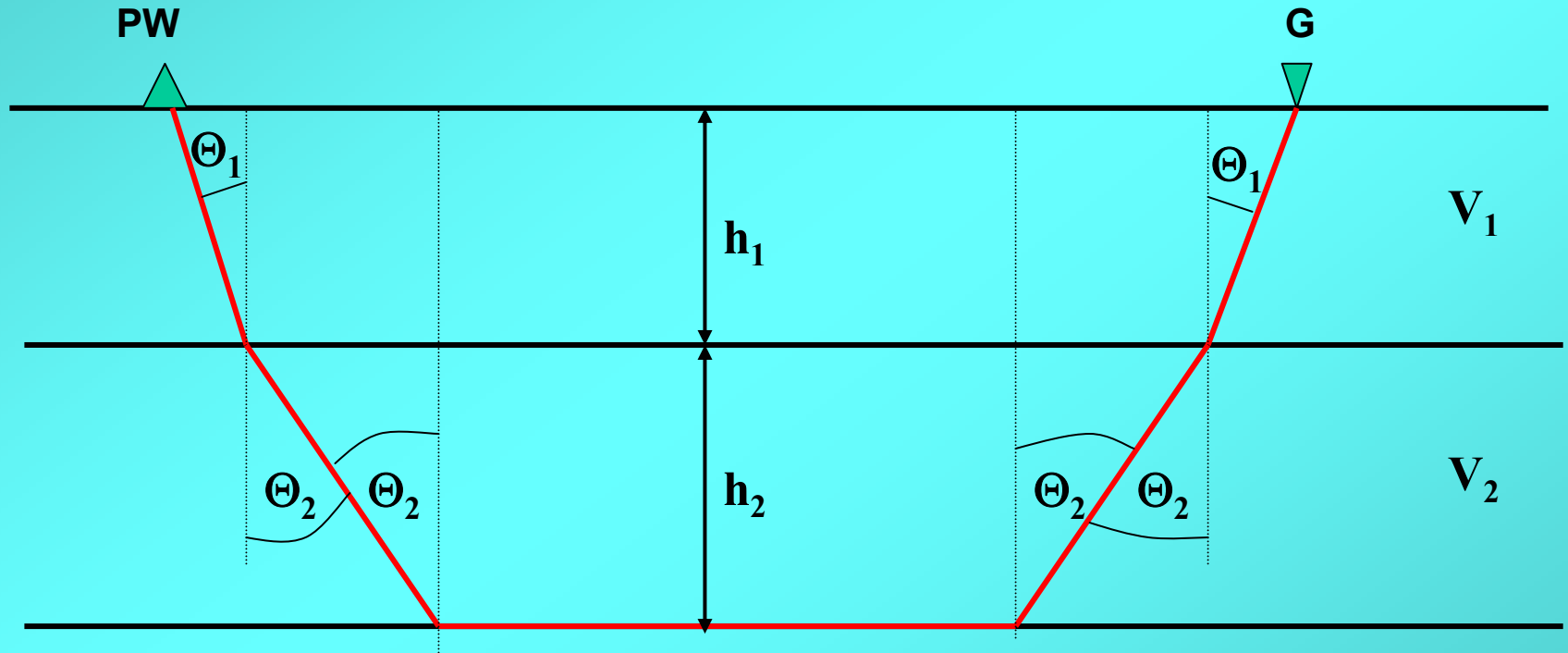
$$V_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}$$



głębokość zalegania granicy:

$$h = \frac{V_1 V_2 \cdot t_0}{2(V_2^2 - V_1^2)^{1/2}}$$

B. Ośrodek trójwarstwowy z dwoma granicami refrakcyjnymi zalegającymi poziomo.



Czas dojścia fali ugiętej na dolnej granicy refrakcyjnej:

$$t = \frac{2h_1}{V_1 \cos \Theta_1} + \frac{2h_2}{V_2 \cos \Theta_2} + \frac{x - 2h_1 \operatorname{tg} \Theta_1 - 2h_2 \operatorname{tg} \Theta_2}{V_3}$$

Wartość kątów Θ_1 i Θ_2 możemy obliczyć z prawa Snelliusa:

$$\sin \Theta_2 = \frac{V_2}{V_3} \quad \cos \Theta_2 = \left(1 - \sin^2 \Theta_2\right)^{1/2} \quad \operatorname{tg} \Theta_2 = \frac{V_2}{\sqrt{V_3^2 - V_2^2}}$$
$$\frac{\sin \Theta_1}{\sin \Theta_2} = \frac{V_1}{V_2}$$

skąd:

$$\sin \Theta_1 = \sin \Theta_2 \cdot \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_2}{V_3} \cdot \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V_3}$$
$$\cos \Theta_1 = \frac{\sqrt{V_3^2 - V_1^2}}{V_3} \quad \operatorname{tg} \Theta_1 = \frac{V_1}{\sqrt{V_3^2 - V_1^2}}$$

$$\sin \Theta_1 = \frac{V_1}{V_3}$$

$$\sin \Theta_2 = \frac{V_2}{V_3}$$

Wzór na hodograf fali ugiętej na dolnej warstwie

$$t = \frac{x}{V_3} + \frac{2h_1}{V_1} \left(\frac{1}{\cos \Theta_1} - \frac{V_1}{V_3} \cdot \operatorname{tg} \Theta_1 \right) + \frac{2h_2}{V_2} \left(\frac{1}{\cos \Theta_2} - \frac{V_2}{V_3} \cdot \operatorname{tg} \Theta_2 \right) =$$
$$= \frac{x}{V_3} + \frac{2h_1}{V_1} \left(\frac{1}{\cos \Theta_1} - \frac{\sin^2 \Theta_1}{\cos \Theta_1} \right) + \frac{2h_2}{V_2} \left(\frac{1}{\cos \Theta_2} - \frac{\sin^2 \Theta_2}{\cos \Theta_2} \right)$$

ponieważ:

$$\frac{1}{\cos \Theta} - \frac{\sin^2 \Theta}{\cos \Theta} = \frac{1 - \sin^2 \Theta}{\cos \Theta} = \frac{\cos^2 \Theta}{\cos \Theta} = \cos \Theta$$

więc:

$$t = \frac{x}{V_3} + \frac{2h_1 \cos \Theta_1}{V_1} + \frac{2h_2 \cos \Theta_2}{V_2}$$

Jest to równanie prostej o nachyleniu $1/V_3$, przecinającej oś czasu dla $x = 0$ w punkcie:

$$t_i = t_{01} + t_{02} = \frac{2h_1 \cos \Theta_1}{V_1} + \frac{2h_2 \cos \Theta_2}{V_2}$$

Porównanie hodografu fali ugiętej na dolnej granicy refrakcyjnej z hodografem fali ugiętej na górnej granicy.

$$t^{(g)} = \frac{x}{V_2} + \frac{2h_1 \cos i}{V_1} = \frac{x}{V_2} + \frac{2h_1 \sqrt{V_2^2 - V_1^2}}{V_1 V_2}$$

$$t^{(d)} = \frac{x}{V_3} + \frac{2h_1 \sqrt{V_3^2 - V_1^2}}{V_1 V_3} + \frac{2h_2 \sqrt{V_3^2 - V_2^2}}{V_2 V_3}$$

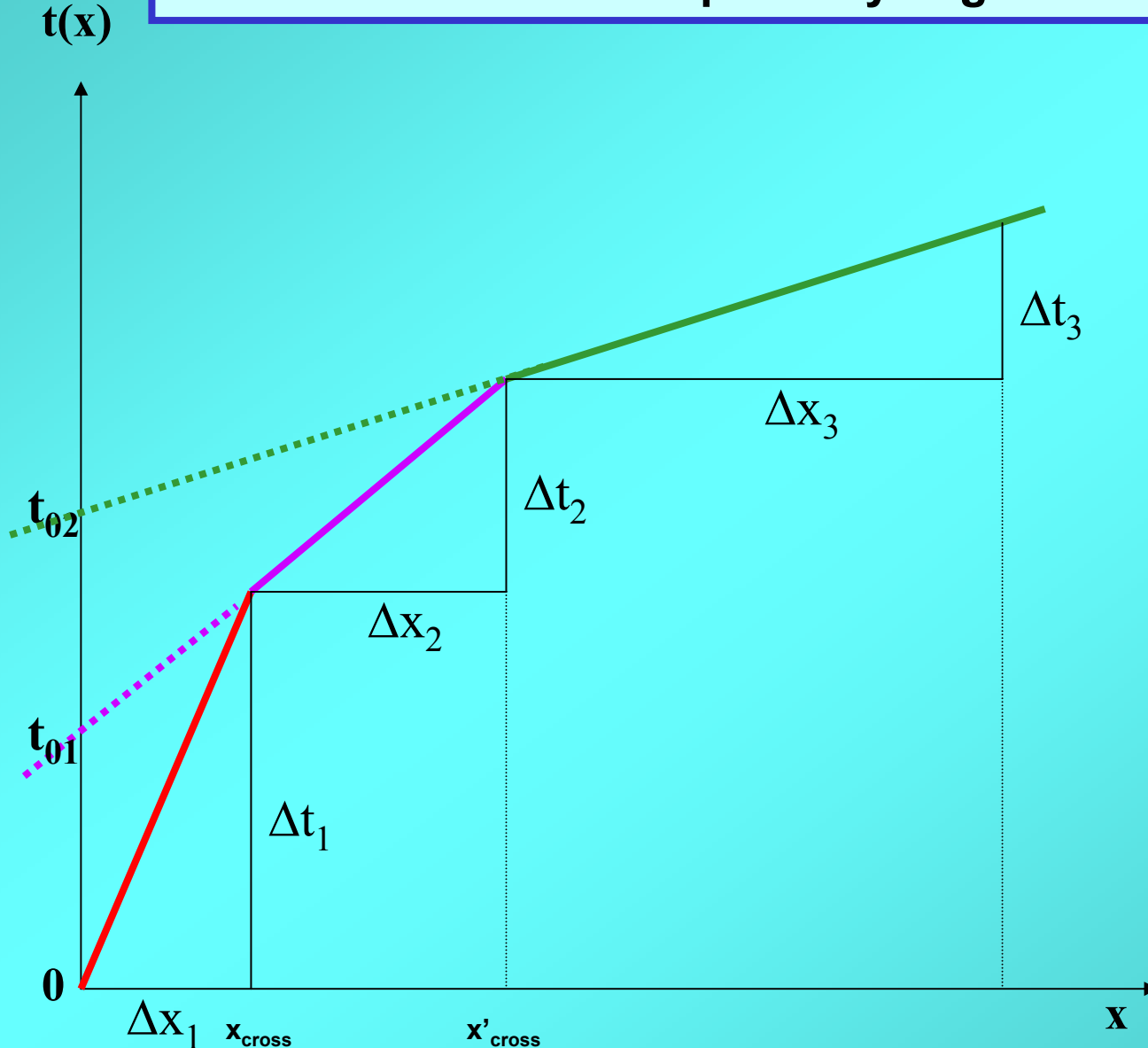
współrzędna punktu do którego obie fale docierają równocześnie:

$$\frac{x}{V_2} - \frac{x}{V_3} = \frac{2h_1 \sqrt{V_2^2 - V_1^2}}{V_1 V_2} - \frac{2h_1 \sqrt{V_3^2 - V_1^2}}{V_1 V_3} - \frac{2h_2 \sqrt{V_3^2 - V_2^2}}{V_2 V_3}$$

$$x'_{cross} = \frac{2V_2 V_3}{V_3 - V_2} \left(\frac{h_1 \sqrt{V_2^2 - V_1^2}}{V_1 V_2} - \frac{h_1 \sqrt{V_3^2 - V_1^2}}{V_1 V_3} - \frac{h_2 \sqrt{V_3^2 - V_2^2}}{V_2 V_3} \right)$$

Dla $x > x'_{cross}$ jako pierwsza do odbiornika dociera fala ugięta na granicy dolnej

Interpretacja hodografów refrakcyjnych dla układu trzech warstw z poziomymi granicami



$$V_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}$$

$$V_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}$$

$$V_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta t_3}$$

$$\Theta_1 = \arcsin \frac{V_1}{V_3}$$

$$\Theta_2 = \arcsin \frac{V_2}{V_3}$$

$$h_1 = \frac{V_1 t_{01}}{2 \cos \Theta_1}$$

$$h_2 = \frac{V_2 (t_{02} - t_{01})}{2 \cos \Theta_2}$$

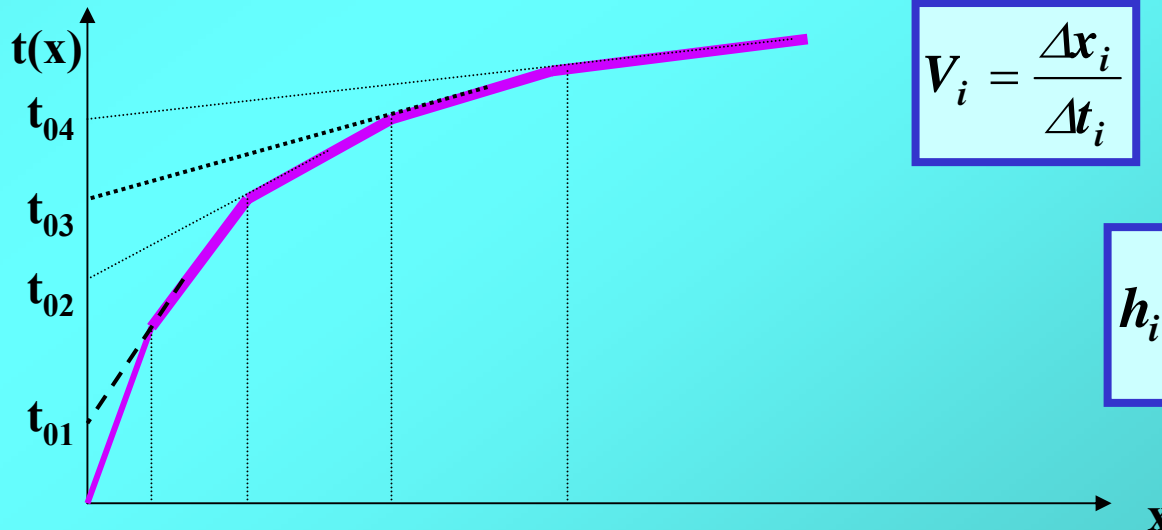
C. Ośrodek wielowarstwowy z granicami refrakcyjnymi zalegającymi poziomo.

Rozważania przeprowadzone dla ośrodka trójwarstwowego możemy uogólnić na ośrodek wielowarstwowy.

Hodograf fali ugiętej na granicy n-tej warstwy opisuje wzór:

$$t_n = \frac{x}{V_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2h_i \cos \Theta_i}{V_i}$$

Zarejestrowany hodograf dla całego odcinka x będzie się składał z odcinków o malejącym nachyleniu równym $1/V_i$ a ich przedłużenia dla $x = 0$ będą wyznaczały czasy t_{0i} . Możemy więc wyznaczać V_i i h_i kolejno analogicznie jak w przypadku trójwarstwowym.

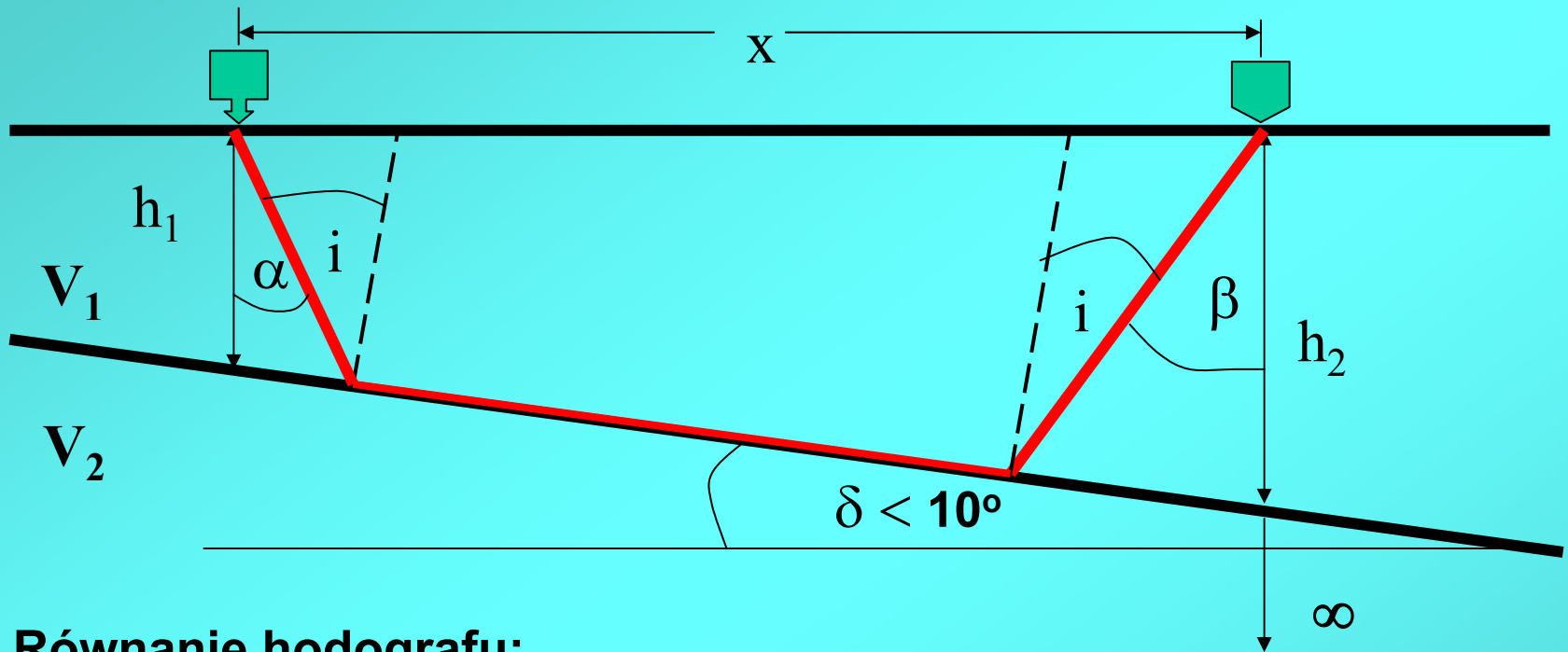


$$V_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}$$

$$\Theta_i = \arcsin \frac{V_i}{V_n}$$

$$h_i = \frac{V_i (t_{0,i} - t_{0,i-1})}{2 \cos \Theta_i}$$

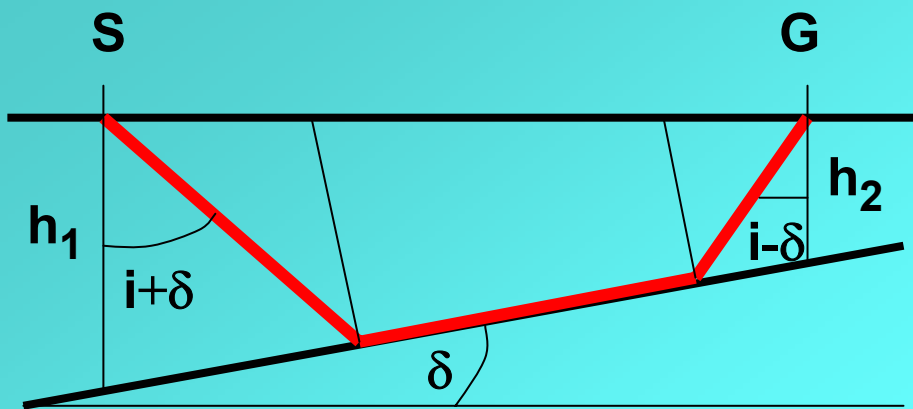
D. Ośrodek dwuwarstwowy – granica płaska, nachylona



Równanie hodografu:

$$t = \frac{h_1}{V_1 \cos(\alpha)} + \frac{h_2}{V_1 \cos(\beta)} + \frac{x - h_1 \operatorname{tg}(\alpha) - h_2 \operatorname{tg}(\beta)}{V_2}$$

Nachylenie hodografu fali ugiętej **nie jest** w tym przypadku równe $1/V_2$ lecz $1/V_{2p}$, gdzie V_{2p} nazywamy **prędkością pozorną**.

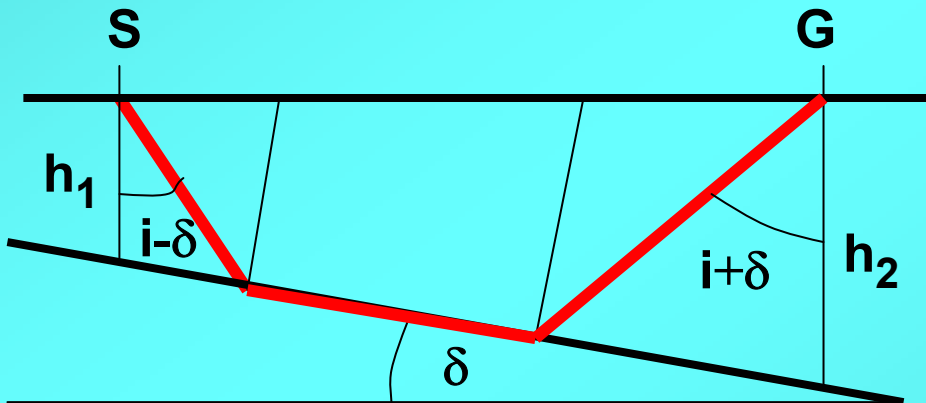


$$\alpha = (i + \delta)$$

$$\beta = (i - \delta)$$

hodograf fali propagującej „pod upad” granicy

$$t^+ = \frac{x \sin(i + \delta)}{V_1} + \frac{h_1 \cos(i + \delta)}{V_1} + \frac{h_2 \cos(i - \delta)}{V_1}$$



$$\alpha = (i - \delta)$$

$$\beta = (i + \delta)$$

hodograf fali propagującej „z upadem” granicy

$$t^- = \frac{x \sin(i - \delta)}{V_1} + \frac{h_1 \cos(i - \delta)}{V_1} + \frac{h_2 \cos(i + \delta)}{V_1}$$

Hodografy t^+ i t^- mają nachylenie oraz czasy t_0 równe:

$$t^+ : \quad \frac{1}{V_P^+} = \frac{\sin(i + \delta)}{V_1}$$

$$t^- : \quad \frac{1}{V_P^-} = \frac{\sin(i - \delta)}{V_1}$$

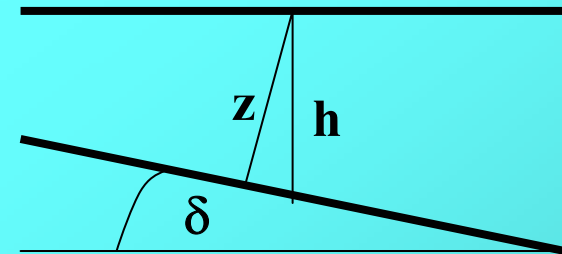
$$t_0^+ = \frac{1}{V_1} (h_1 \cos(i + \delta) + h_2 \cos(i - \delta))$$

$$t_0^- = \frac{1}{V_1} (h_1 \cos(i - \delta) + h_2 \cos(i + \delta))$$

dla małych kątów upadu można przyjąć $h_1 \approx h_2 = h$, skąd:

$$t^+ = \frac{x \sin(i + \delta)}{V_1} + \frac{2h \cos i \cos \delta}{V_1}$$

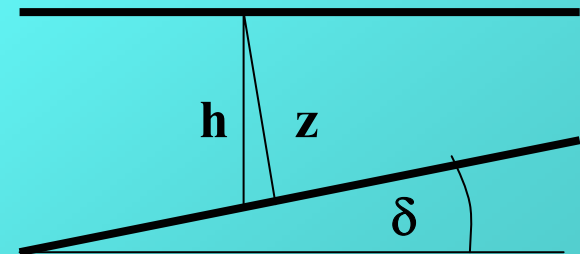
$$t^- = \frac{x \sin(i - \delta)}{V_1} + \frac{2h \cos i \cos \delta}{V_1}$$



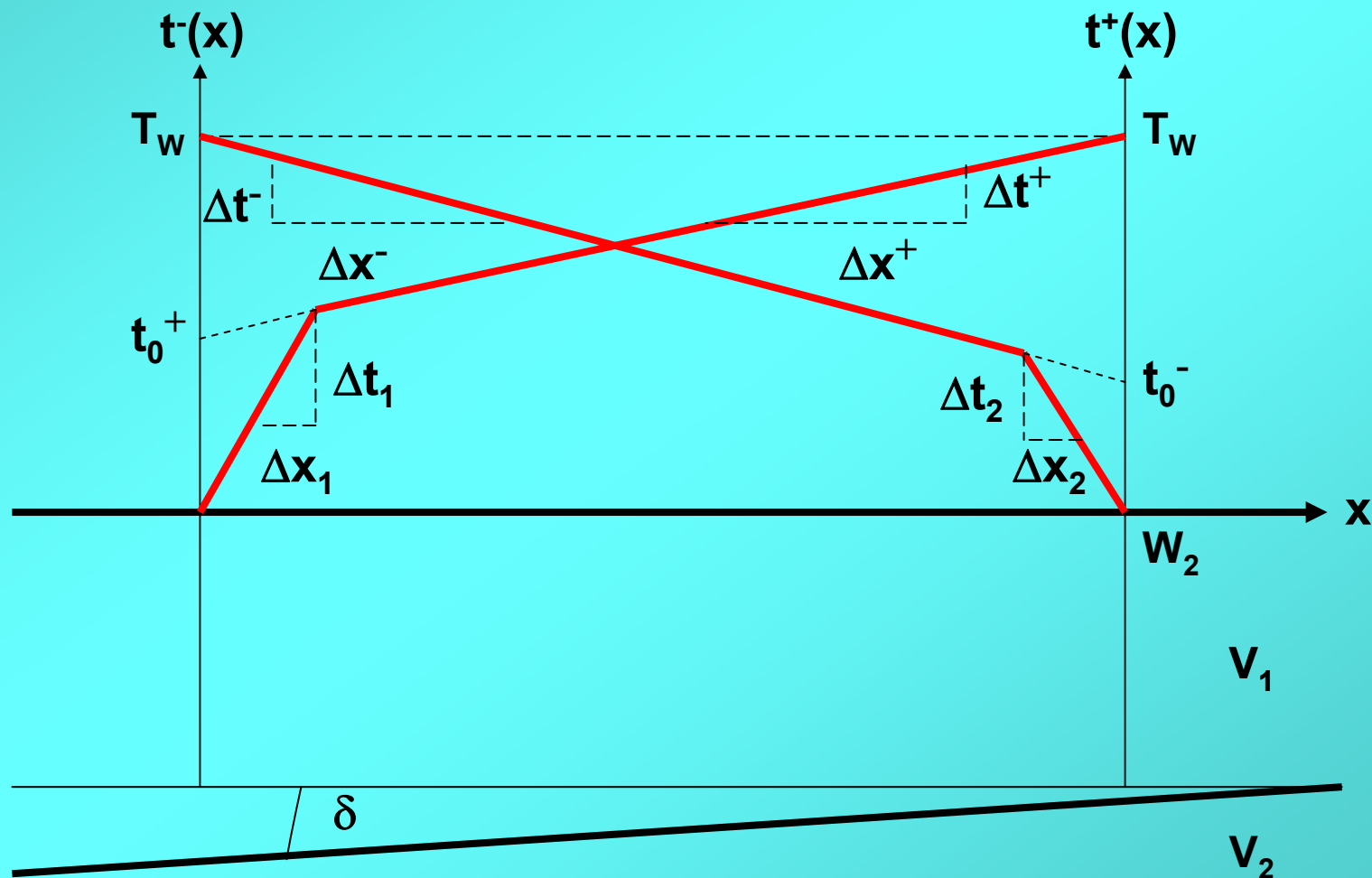
$$z = h \cos \delta$$

i wyrazić t_0 poprzez „z”:

$$t_0 = \frac{2h \cos i \cos \delta}{V_1} = \frac{2z \cos i}{V_1}$$



Aby określić położenie granicy oraz rzeczywistą prędkość graniczną należy wykonać pomiary dla przebiegu fali **w obu kierunkach** zamieniając ze sobą miejscami punkt wzbudzenia i punkt odbioru. Jest to **metoda „hodografów zbieżnych”**.



Ponieważ czas przebiegu fali z W_1 do W_2 musi być taki sam jak z W_2 do W_1 więc hodograf $t^+(W_2) = t^-(W_1) = T_w$

Z wykresu wyznaczamy:

$$V_P^+ = \frac{\Delta x^+}{\Delta t^+}, \quad V_P^- = \frac{\Delta x^-}{\Delta t^-}$$

$$V_{1A} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}, \quad V_{1B} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}$$

$$V_1 = \frac{V_{1A} + V_{1B}}{2}$$

$$t_0^+$$

$$t_0^-$$

$$\frac{1}{V_P^+} = \frac{\sin(i + \delta)}{V_1} \quad \Leftrightarrow \quad i + \delta = \arcsin \frac{V_1}{V^+}$$

$$\frac{1}{V_P^-} = \frac{\sin(i - \delta)}{V_1} \quad \Leftrightarrow \quad i - \delta = \arcsin \frac{V_1}{V^-}$$

$$h_1 = \frac{V_1 t_0^+}{2 \cos i \cos \delta}$$

$$h_2 = \frac{V_1 t_0^-}{2 \cos i \cos \delta}$$

$$i = \frac{1}{2} \left(\arcsin \frac{V_1}{V_2^+} + \arcsin \frac{V_1}{V_2^-} \right)$$

$$\delta = \frac{1}{2} \left(\arcsin \frac{V_1}{V_2^+} - \arcsin \frac{V_1}{V_2^-} \right)$$

$$V_2 = \frac{V_1}{\sin i}$$

E. Ośrodek wielowarstwowy o nachylonych granicach

Równanie hodografu dla promienia ugiętego pod kątem 90° na granicy n-tego ośrodka:

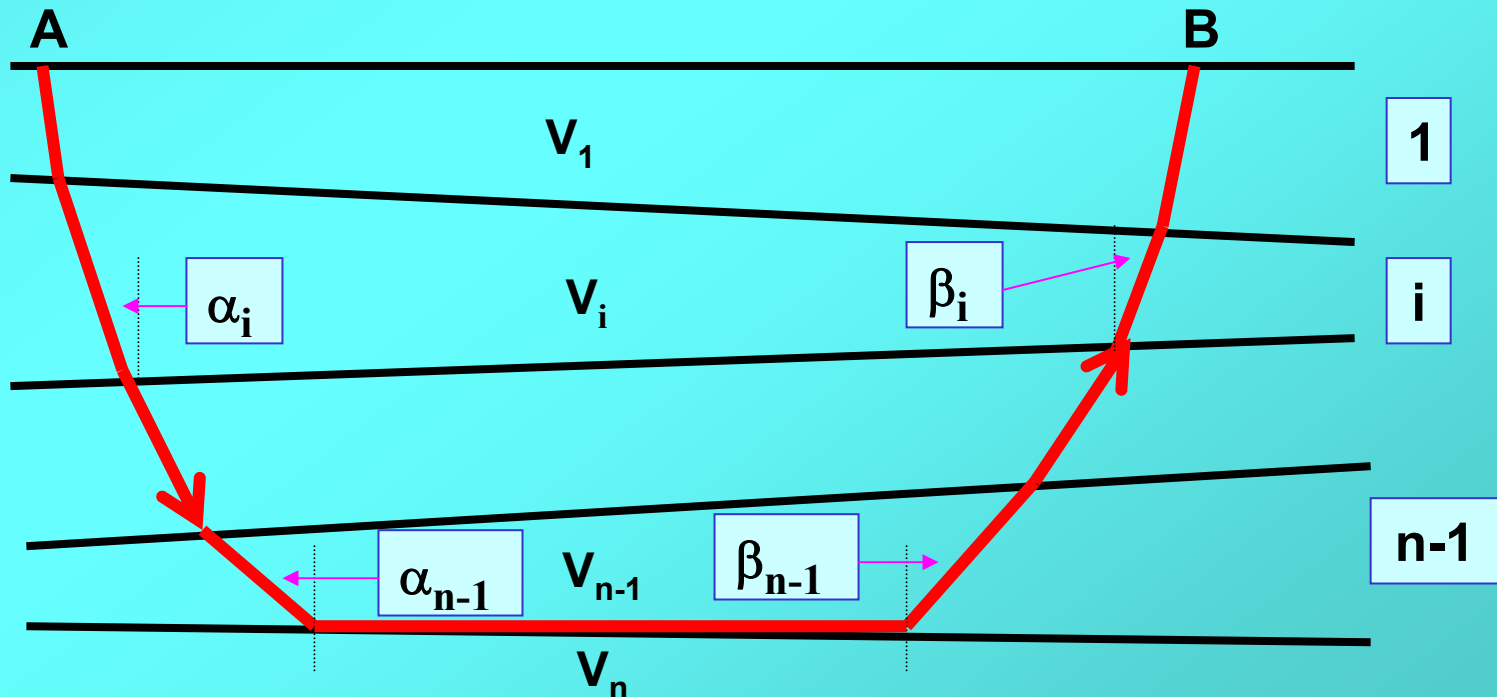
$$t_n = \frac{x \sin \beta_1}{V_1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i (\cos \alpha_i + \cos \beta_i)}{V_i}$$

V_i – prędkość fali w i-tej warstwie

h_i – miąższość i-tej warstwy pod punktem wzbudzenia

α_i – kąt jaki w i-tej warstwie tworzy z pionem promień fali propagującej w dół

β_i – kąt jaki w i-tej warstwie tworzy z pionem promień fali propagującej w górę



δ_i – kąt upadu i-tej warstwy

θ_i – arcsin (V_1 / V_i)

warstwa wznosi się w kierunku od A do B

$$\alpha_i = \theta_i + \delta_i$$

$$\beta_i = \theta_i - \delta_i$$

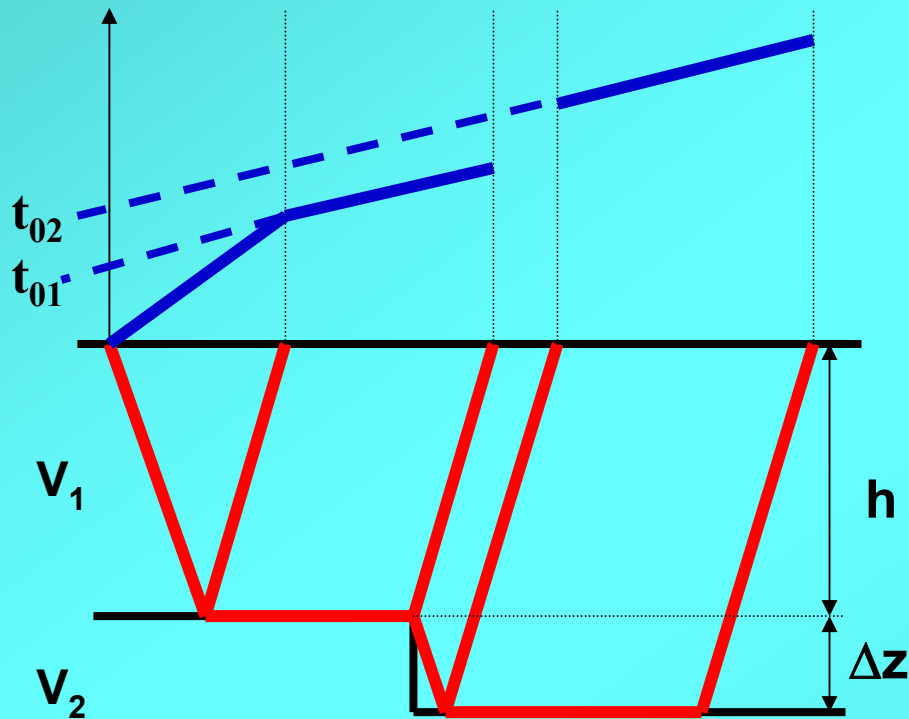
warstwa zapada w kierunku od A do B

$$\alpha_i = \theta_i - \delta_i$$

$$\beta_i = \theta_i + \delta_i$$

F. Granica refrakcyjna z uskokiem

W przypadku gdy granica refrakcyjna przecięta jest uskokiem o rzucie Δz na hodografie obserwujemy przesunięcie równoległe części hodografu.



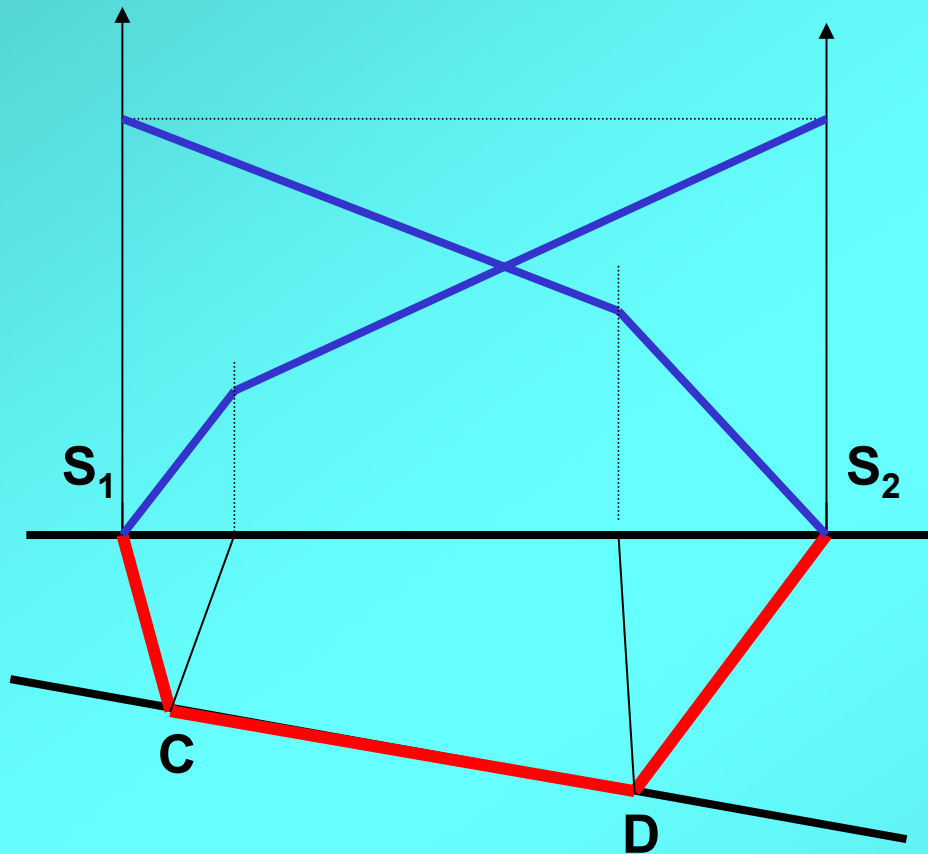
$$\Delta z \ll h$$

$$\Delta T = t_{02} - t_{01}$$

$$\Delta z \cong \Delta T \frac{V_1 V_2}{\sqrt{V_2^2 - V_1^2}}$$

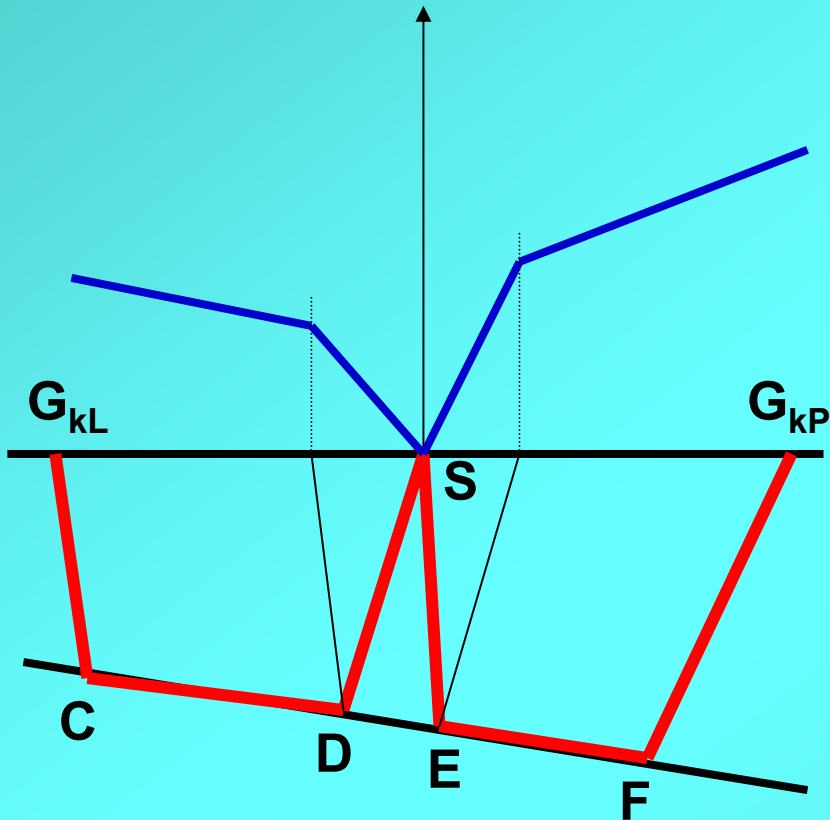
Metody badania przebiegu płaskich granic refrakcyjnych

I. Metoda hodografów zbieżnych



Metoda hodografów zbieżnych pozwala na wyznaczenie przebiegu granicy na odcinku CD . Głębokość granicy pod S_1 i S_2 wyznacza się ekstrapolując przebieg granicy poza odcinek CD

II. Metoda hodografów rozbieżnych

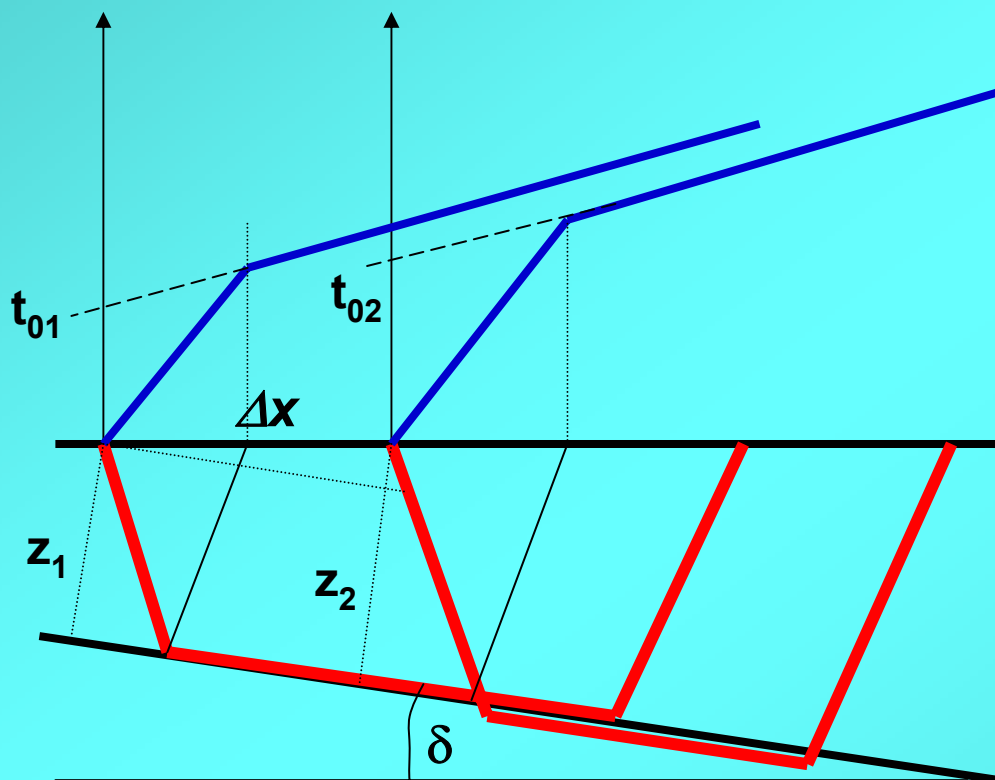


Polega ona na pomiarach czasu dojścia fali do punktów położonych po obu stronach centralnego punktu wzbudzenia. Parametry granicy uginającej wyznacza się, podobnie jak dla hodografów zbieżnych, z równań obu gałęzi hodografu.

Metoda hodografów rozbieżnych pozwala na wyznaczenie przebiegu granicy na odcinku CD i EF. Głębokość granicy pod S wyznacza się interpolując przebieg granicy na odcinku DE.

III. Metoda hodografów nabieżnych

W metodzie tej zestaw punkt wzbudzenia – geofony przesuwa się w całości o stały krok Δx .



$$z_2 - z_1 = \Delta x \sin \delta$$

Równanie j-tego hodografu:

$$t_j = \frac{x \sin(\delta + i)}{V_1} + \frac{2z_j \cos i}{V_1}$$

$$t_{0j} = \frac{2z_j \cos i}{V_1}$$

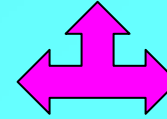
Gdy granica **nie jest** nachylona wówczas czasy t_{0j} dla każdego hodografu będą **takie same**.

Gdy granica **jest** nachylona wówczas czasy t_{0j} dla każdego hodografu będą **różne**.

Interpretacja hodografów nabeżnych

$$\Delta t = t_{02} - t_{01} = \frac{\Delta x}{V_1} \cdot 2 \sin \delta \cos i = \Delta x \left(\frac{\sin(i + \delta)}{V_1} - \frac{\sin(i - \delta)}{V_1} \right)$$

$$\frac{\sin(i + \delta)}{V_1} = \frac{1}{V_p^+}$$



$$\frac{\sin(i - \delta)}{V_1} = \frac{1}{V_p^-}$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{V_p^-} - \frac{1}{V_p^+}$$

Z hodografów odczytujemy: t_{01} t_{02}

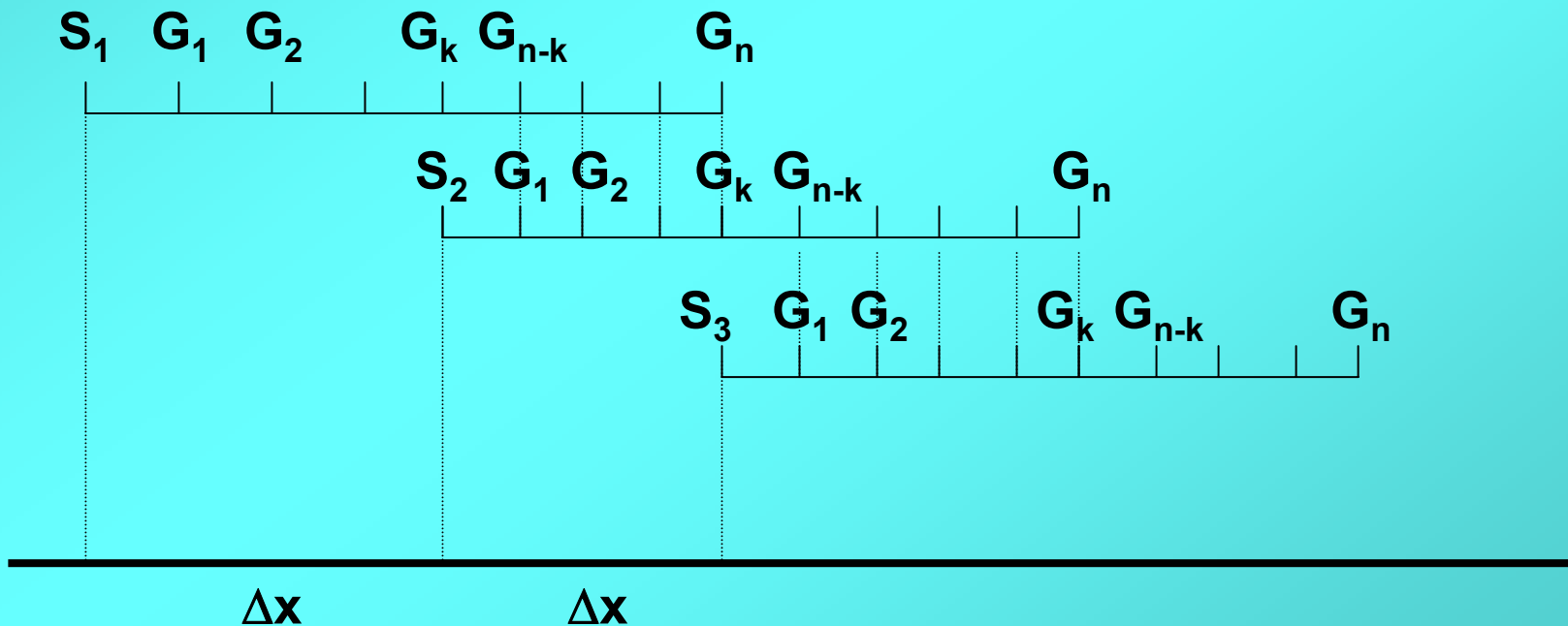
oraz $\frac{1}{V_p^-}$ i obliczamy: $\frac{\Delta t}{\Delta x}$

$$\frac{1}{V_p^+} = \frac{1}{V_p^-} - \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

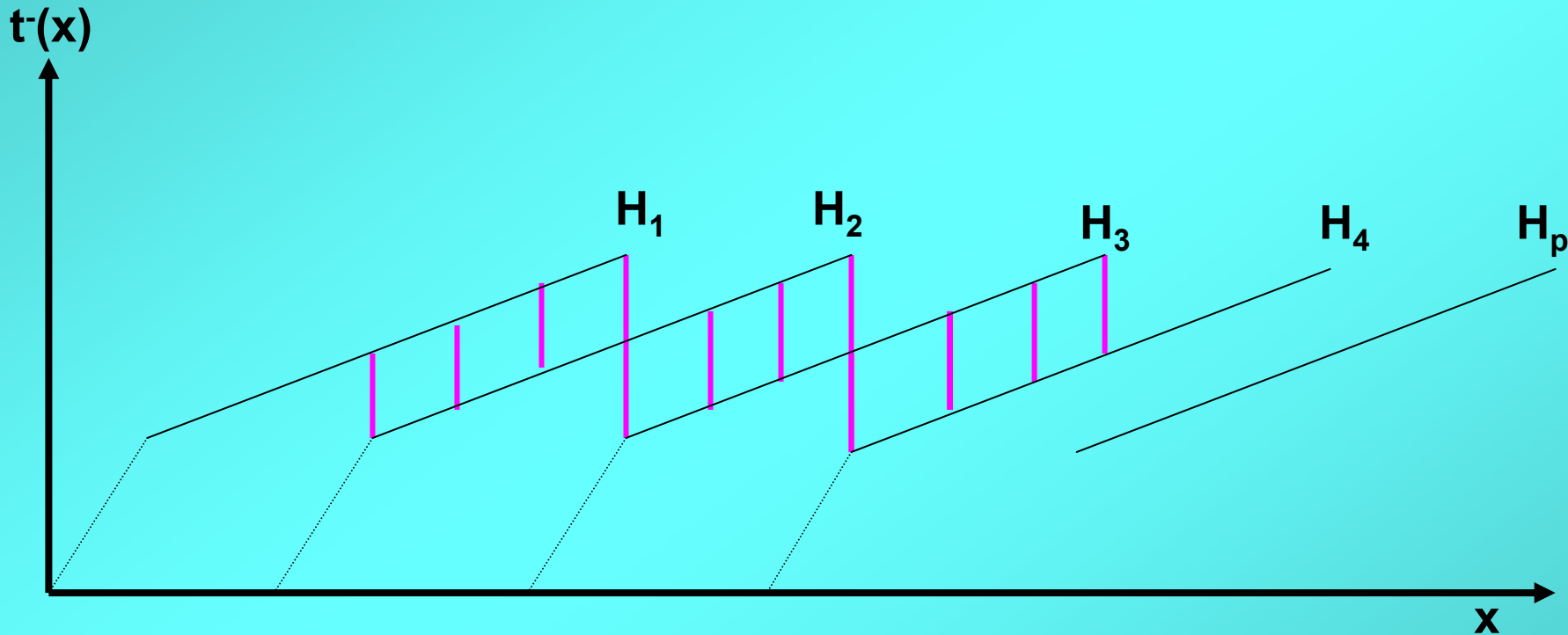
Dalsza interpretacja przebiega jak w metodzie hodografów zbieżnych

Ciągłe profilowanie refrakcyjne

Aby uzyskać hodograf na odcinku wielokrotnie przekraczającym długość rozstawu pomiarowego stosujemy metodykę podobną jak w metodzie hodografów nabieżnych. Przemieszczamy cały zestaw pomiarowy o odcinek Δx tak by kilka ostatnich geofonów na odcinku poprzednim stały się początkowymi geofonami na odcinku następnym.



Uzyskujemy serię hodografów. Dla każdego kolejnego hodografu wyliczamy poprawkę Δt_i ($i = 1, 2, \dots, p$) na podstawie czasów pierwszych wejść w powtarzających się punktach.



poprawka dla i -tego hodografu:

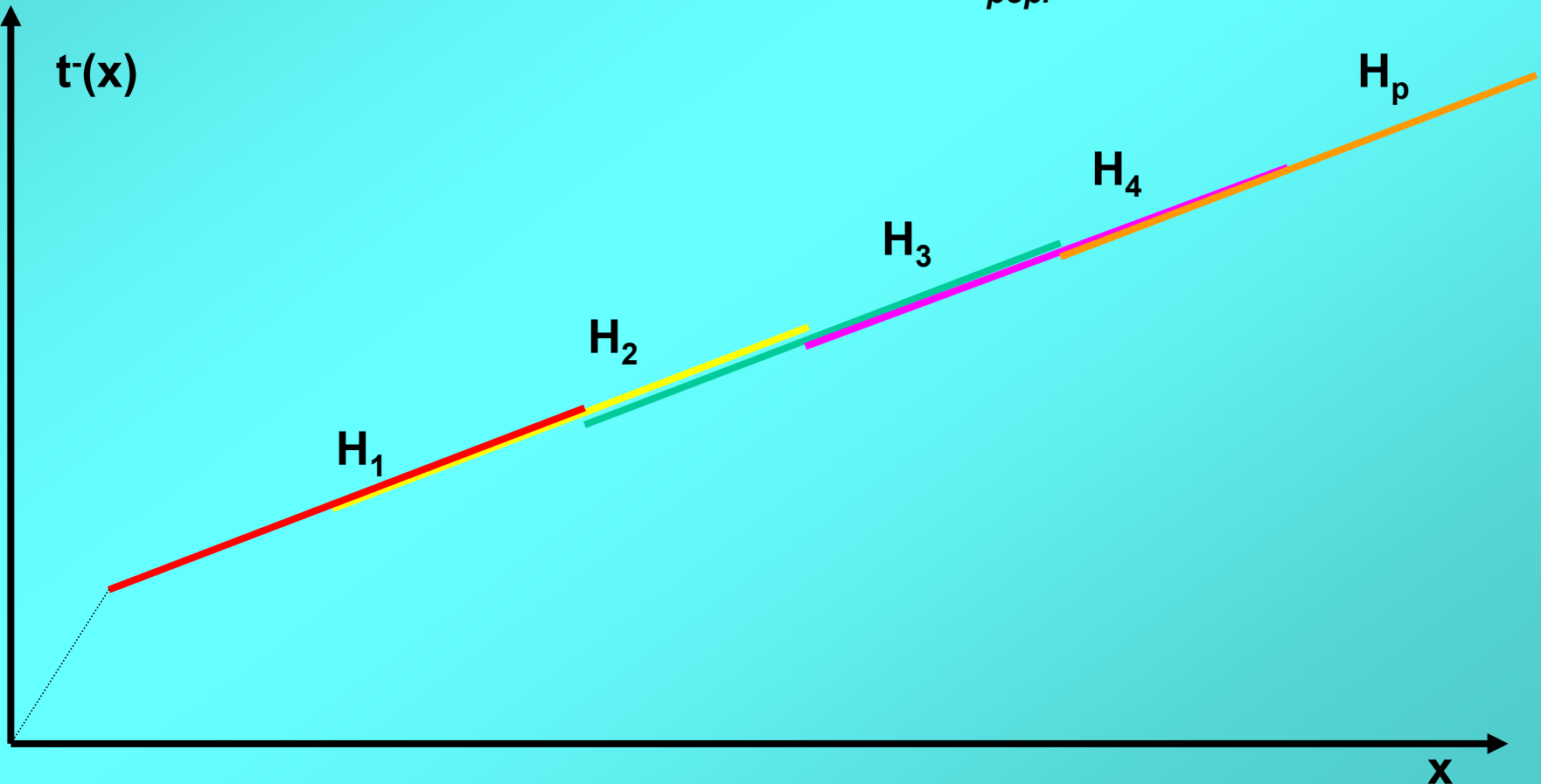
$$\Delta t_i = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K [t_{n-K+j}^{(i)} - t_j^{i+1}]$$

K - liczba geofonów pokrywających się na sąsiednich odcinkach

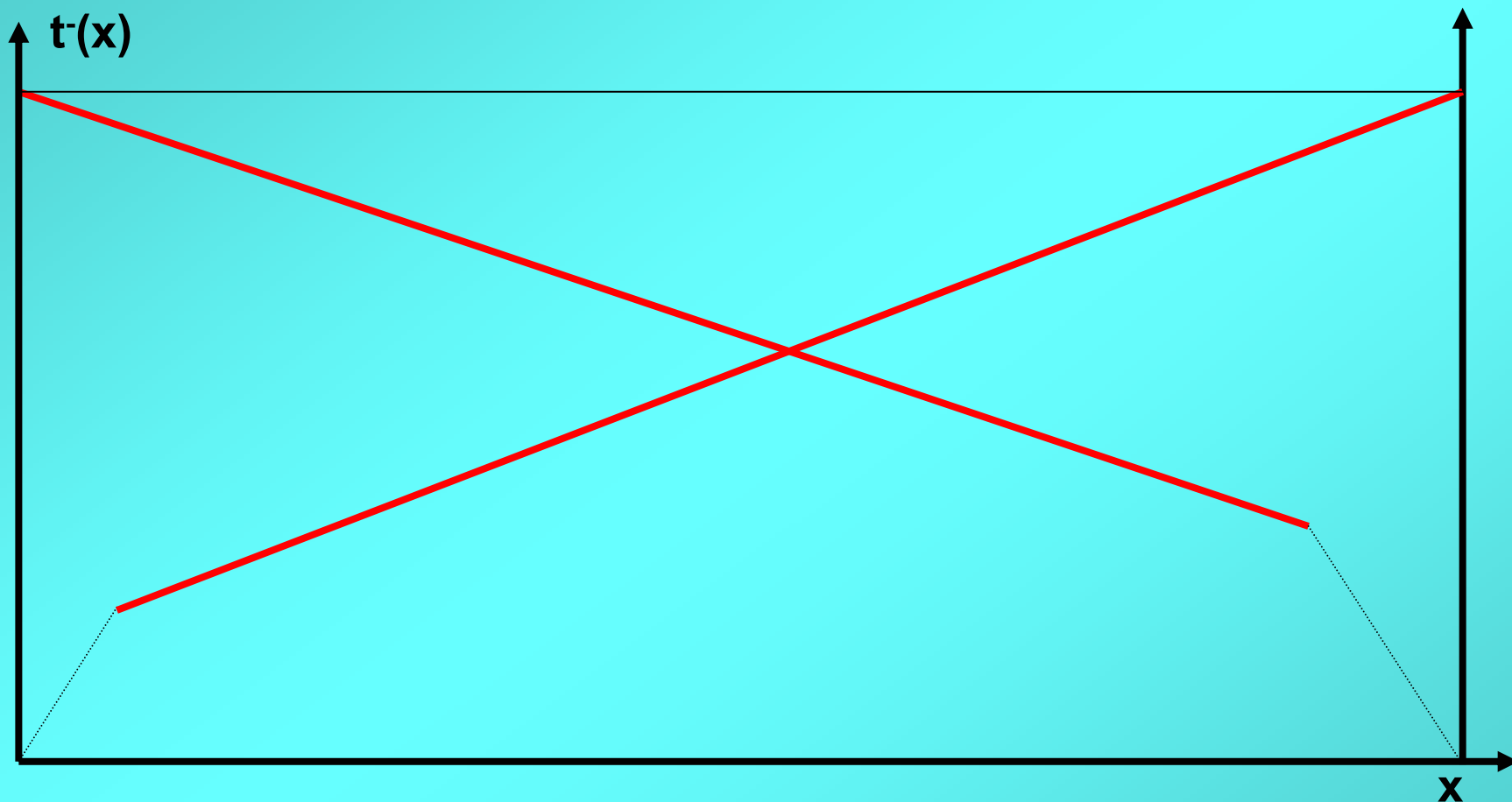
Czasy dla poszczególnych hodografów modyfikujemy dodając kolejne poprawki:

$$t_{popr}^{(i)}(x) = t^{(i)}(x) + \sum_{j=1}^{i-1} \Delta t_j$$

Otrzymujemy w rezultacie zbiorczy hodograf $t_{popr}(x)$ dla całego profilu



Wykonując pomiary w kierunku odwrotnym otrzymujemy dwa długodystansowe hodograpy zbieżne.



Hodograpy te można interpretować dla granic płaskich jak i niepłaskich